وزارة المعارف العمومية

كتاب الهندسة

للمدارس الثانوية

الأجزاء الثلاثة الأولى

تأليف هول واستيفنز

وفيه بعض التعديل بما يلائم حالة المدارس المصرية

عربه بأمر وزارة المعارف العمومية
محمد أسعد براده
مساعد مفتش بوزارة المعارف العمومية

الطبعة الخامسة
بالمطبعة الأميرية بالقاهرة
١٩٢٥

محتويات الكتاب

الجزء الأول

صفحة

فى الخطوط والزوايا

فى المثلثات

فى المتوازيات

صفحة

(تابع) المثلثات

فى الأشكال المتوازية الأضلاع

الهندسة العملية — العمليات

عمليات على المستقيمات والزوايا

فى انشاء المثلثات

فى انشاء الأشكال الرباعية

المحل الهندسى

المستقيمات المتلاقية فى نقطة واحدة فى المثلث

الجزء الثانى – فى المساحات

دعاوى عملية على المساحات

المحوران الاحداثيان والبعدان الاحداثيان

الجزء الثالث — الدائرة

تعاريف ومبادئ أولية

صفحة

فى الأوتار

الزوايا المرسومة فى الدائرة

صفحة

فى التماس

صفحة

فى الدعاوى العملية

الدائرة والأشكال المستقيمة الأضلاع

نظريات وأمثلة على الدوائر والمثلثات

الجزء الأوّل

بسم الله الرحمن الرحيم

علم الهندسة

الجزء الأول

البـــديهيات

بنى علماء الرياضة جميع براهينهم على قواعد ثابتة ومبادئ بسيطة يدركها العقل لأول وهلة لسهولتها ووضوحها ولا يحتاج للتسليم بصحتها الى دقة نظر أو اقامة دليل

وهذه المبادئ البسيطة الأولية تسمى بالبديهيات نحو الأشياء التى يساوى كل منها الشئ نفسه متساوية

والبديهيات الآتية مما يحتاج اليها كثيرا فى البراهين الهندسية وهى مرتبة على ترتيب القواعد الأربع الأصلية فى علم الحساب

الجمــع : اذا أضفنا أشياء متساوية الى أخرى متساوية كانت الحواصل متساوية

الطــرح : اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى متساوية كانت البواقى متساوية

الضرب : المضاعفات الواحدة للأشياء المتساوية تكون متساوية فان كان شيئان متساويين كان مثلا أحدهما مساويين لمثلى الآخر

القسمة : اذا انقسم كل من الأشياء المتساوية الى عدد واحد من أجزاء متساوية كانت هذه الأجزاء فى الجميع متساوية .

فأنصاف الأشياء المتساوية متساوية

وهذه البديهيات لم نوردها هنا إلا على سبيل التمثيل فقط وهناك غيرها وهى عامة لامكان تطبيقها بمثابة واحدة على جميع المقادير أيا كان نوعها . ولعلم الهندسة بديهيات خاصة نورد كلا منها عند الحاجة

التعـاريف والمبـادئ الأوّلية

لكل من النقطة والخط والسطح فى علم الهندسة مدلول خاص غير ماتدل عليه عند اطلاقها

١ فالنقطة الهندسية كل ماله وضع مجرد عن الطول والعرض والارتفاع

وهذا معناه أن النقطة لاتقترن بشيء من الطول والعرض بل تقترن فقط بالموضع الذى تشغله فاذا عينا نقطة بقلم الرصاص الدقيق على قطعة من الورق فهذه يمكن أن تدل بوجه التقريب على نقطة هندسية غير انها لاتخلو من طول وعرض أبدا مهما صغرت فلايمكن اعتبارها نقطة هندسية بالمعنى الصحيح وانمـا هى كلما صغرت كانت أقرب الى الدلالة على النقطة الهندسية

٢ والخط ما له طول وليس له عرض

ويحدث من تحرك نقطة فاذا تصوّرنا تحرك النقطة التى عيناها على الورقة فانهـا تحدث مايمثل الخط ولكن هذا مهما كان دقيقا فى الرسم لايخلو من عرض فلا يمكن اعتباره خطا هندســيا بالمعنى الصحيح . وكلما دق هذا الخط كان أقرب الى الخط الهندسى

٣ واذا تتبعنا الفكرة وانتقلنا من الخط الى الســطح كما انتقلنا من النقطة الى الخط نقول ان السطح هو ماله طول وعرض وليس له ارتفاع

فالجسم على هذا المنوال هو ماله طول وعرض وارتفاع

ومما ذكر تظهر العلاقة بين الجسم والسطح والخط والنقطة فيما خلاصته

أوّلا — الجسم يتحدد بسطوح

ثانيـا — السطح يتحدد بخطوط والسطوح تتلاقى فى خطوط

ثالثـا — الخط يتحدد أو ينتهى بنقطتين والخطوط تتلاقى فى نقط

٤ الخط إما أن يكون مستقيما أو منحنيا

فالمستقيم ماحدث من تحرك نقطة فى اتجاه واحد لايتغير

والمنحنى ماحدث من تحرك نقطة فى اتجاه يتغير على الدوام

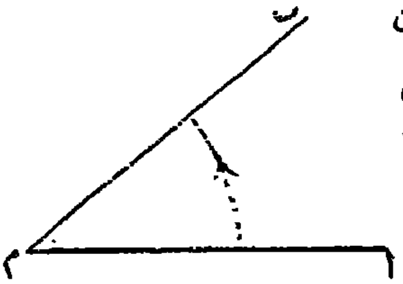
تنبيه — اذا وصل بين أى نقطتين معلومتين بمستقيم لا يمكن أن يوصل بينهما بمستقيم آخر وبعبارة أخرى اذا اشترك مستقيمان فى نقطتين فانهما يتحدان

٥ المستوى هو سطح ينطبق عليه المستقيم تمـام الانطباق مهما تغير وضعه

٦ اذا تلاقى مستقيمان فى نقطة حدث من تلاقيهما مايسمى زاوية

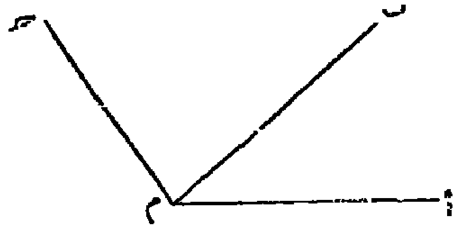
ويسمى كل من المستقيمين بضلع الزاوية ونقطة تلاقيهما برأسها

وهذان الضلعان لا ارتباط لطولها بمقدار الزاوية المحصورة بينهما الذى هو فى الحقيقة مقدار دوران أحد الضلعين وافتراقه عن الآخر ومقدار هذا الدوران لا ارتباط له بطول الضلعين



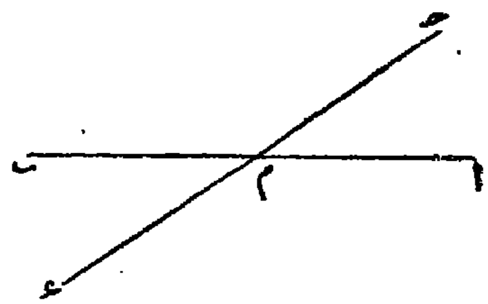
فمثلا ان فرضنا أن الضلع م ا (راجع الشكل) ثابت لا يتحرك وأن الضلع الآخر م ب يتحرك حول نقطة م وأنه قبل تحركه كان منطبقا على م ا ثم تحرك الى أن صار فى الوضع م ب فمقدار الزاوية ا م ب الناشئة من ذلك يقدر بقدر دوران هذا الضلع من وضعه الأول م ا الى وضعه الثانى م ب

وبديهى أن مقدار هذا الدوران لا ارتباط له بطول الضلعين



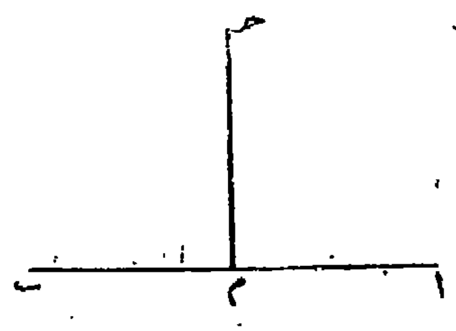
اذا تلاقت عدة مستقيمات فى نقطة فكل زاويتين اشتركتا فى ضلع واحد وكانت احداهما على جهة منه والثانية على الأخرى تسميان الزاويتين المتجاورتين

فمثلا الزاويتان ا م ب ، ب م حـ المشتركتان فى الضلع م ب وعلى كل من جهتيه متجاورتان



اذا تقاطع مستقيمان مثل ا ب ، حـ ء فى نقطة م يقال للزاويتين حـ م ا ، ب م ء أو حـ م ب ، ا م ء متقابلتان بالرأس

٧ اذا تلاقى مستقيمان وكانت الزاويتان المتجاورتان الحادثتان متساويتين يقال لكل زاوية منهما قائمة ويقال للمستقيمين متعامدان وان كلا منهما عمودى على الآخر



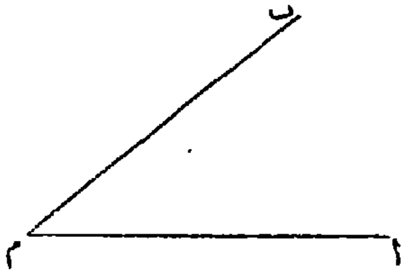
بديهية ١ — نفرض نقطة مثل م على المستقيم ا ب ونتصور مستقيما آخر مثل م حـ يدور حول م مبتدئا من الوضع م ا ومنتهيا فى دورانه الى الوضع م ب فانه فى أثناء دورانه لا يمكن أن يأخذ إلا وضعا واحدا يكون فيه عموديا على ا ب .

بديهية ٢ — الزوايا القوائم متساوية

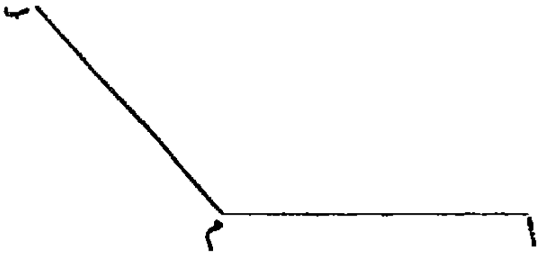
تنقسم الزاوية القائمة الى ٩٠ قسما متساوية كل منها يسمى درجة (°) وتنقسم الدرجة الى ٦٠ قسما متساوية كل منها يسمى دقيقة (َ) وتنقسم الدقيقة الى ٦٠ قسما متساوية كل منها يسمى ثانية (ً)

فان دار المستقيم م حـ (فى الشكل المتقدم) حول نقطة م من الوضع م ا الى الوضع م ب فانه يدور بقدر زاويتين قائمتين أى بقدر ١٨٠°

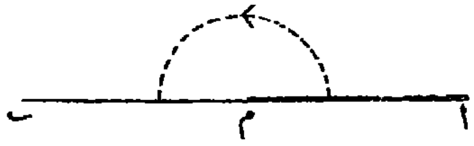
ولو دار المستقيم م ح دورة تامة حول النقطة المذكورة مبتدئا من الوضع م ا حتى عاد اليه فانه قد دار بقدر أربع زوايا قوائم أو بقدر ٣٦٠°



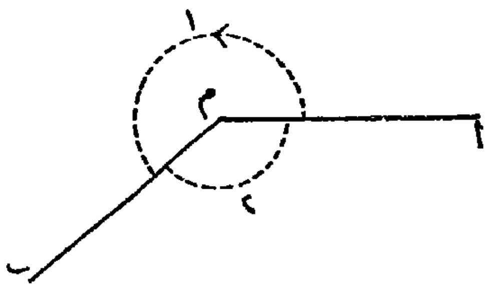
٨ يقال للزاوية اذا كانت أقل من القائمة حادة أى أن مقدار الزاوية الحادة أقل من ٩٠



٩ ويقال للزاوية اذا كانت أكبر من القائمة وأصغر من القائمتين منفرجة أى أن مقدار الزاوية المنفرجة محصور بين ٩٠° و ١٨٠°



١٠ اذا دار أحد ضلعى زاوية مثل م ب حتى صار على استقامة الضلع الآخر م ا فانالزاوية الحادثة يقال لها مستقيمة وعليه فالزاوية المستقيمة = زاويتين قائمتين = ١٨٠°



١١ اذا كانت الزاوية أكبر من قائمتين وأصغر من أربع قوائم تسمى زاوية منعكسة

وعليه فمقدار الزاوية المنعكسة ينحصر بين ١٨٠° و ٣٦٠

ملاحظة — اذا تلاقى مستقيمان فى نقطة حدث من تلاقيهما زاويتان احداهما أكبر من قائمتين والأخرى أصغر من قائمتين وهذا ناشئ من اعتبار دوران الضلع م ب حول نقطة م بعد أن كان منطبقا على م ا

فالدوران إما أن يبتدئ من أعلى م ا الى الجهة اليسرى او من أسفله الى الجهة اليمنى

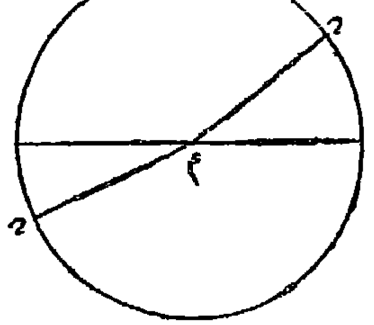
فلو تصوّرنا ان م ب دار حول م من الوضع م ا الى الجهة اليسرى كما هو مبين فى الشكل المتقدّم برقم ١ وصار فى الوضع الذى هو فيه فانه يكون بذلك قد دار بقدر زاوية أكبر من قائمتين

أما اذا دار من الوضع م ا الى الجهة اليمنى وصار فى الوضع الذى هو فيه كما هو مبين فى الشكل المذكور برقم ٢ فانه بذلك يكون قد دار بقدر زاوية أقل من قائمتين

وعند الاطلاق لا يعتبر من الزاويتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر إلا ما كانت أقل من قائمتين فان أريدت الأخرى وجب ذكر مايدل على ذلك

١٢ الشكل المستوى هو جزء من السطح المستوى محدود بخط أو أكثر

١٣ الدائرة هي شكل مستو محاط بخط حادث من حركة نقطة على بعد واحد دائما من نقطة أخرى ثابتة



فمثلا النقطة م ثابتة و د متحركة حول م على بعد واحد دائما منها فالشكل الناتج من ذلك يسمى دائرة

وتسمى النقطة الثابتة بمركز الدائرة

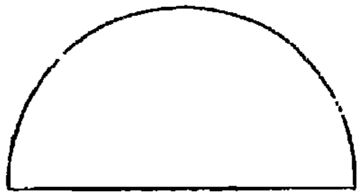
والخط المحدد للدائرة بمحيطها

١٤ نصف قطر الدائرة مستقيم خارج من المركز ومنته بالمحيط وينتج من هذا التعريف أن أنصاف أقطار الدائرة متساوية

١٥ قطر الدائرة هو مستقيم مار بالمركز وطرفاه على المحيط

١٦ قوس الدائرة جزء من محيطها

١٧ نصف الدائرة هو شكل محدود بقطر الدائرة وجزء المحيط المنتهي بطرفي هذا القطر

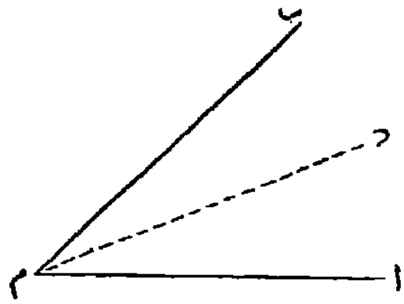


١٨ تنصيف الشيء تقسيمه الى جزأين متساويين

بديهية ١ — اذا تحركت نقطة مثل م من ا الى ب على اتجاه المستقيم ا ب فانها لابد أن تأخذ وضعا واحدا تقسم فيه المستقيم ا ب الى قسمين متساويين أى ان كل مستقيم محدود فيه نقطة تنصيف واحدة



بديهية ٢ — اذا كان المستقيم م د منطبقا على م ا ودار حول النقطة م من الوضع م ا حتى انطبق على م ب فانه لابد أن يأخذ وضعا واحدا يقسم فيه الزاوية ا م ب الى قسمين متساويين أى أنه يمكن اعتبار أن لكل زاوية مستقيما واحدا ينصفها



العمليات المسلم بصحة فرضها

ينتج من البديهيات المذكورة في ٧ و ١٨ أنه يمكن اجراء العمليات الآتية

أولا — اقامة عمود على مستقيم معلوم من أى نقطة عليه

ثانيا — ايجاد نقطة منتصف مستقيم محدود

ثالثا — ايجاد المستقيم المنصف لزاوية معلومة

الانطبـاق والتساوى

بديهية — الأشياء التى يمكن أن ينطبق كل منها على الآخر انطباقا تاما متساوية

ويؤخذ من ذلك أنه لأجل مقارنة خطين أو زاويتين أو أى شكلين كل بالآخر يمكن أن نتصوّر رفع أحدهما من وضعه الأصلى بشرط ألّا يحدث فيه أى تغير سواء فى صورته أو مقداره وتطبيقه على الثانى فان انطبق الشيئان كل على الآخر تمـام الانطباق كانا متساويين وتسمى هذه العملية بعملية التطبيق

القضـايا المسلم بصحتها

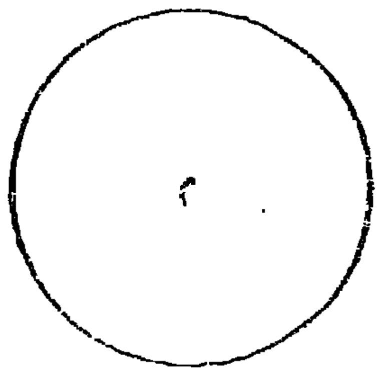
يلزم استعمال آلات خاصة لرسم الأشكال الهندسية وانشائها واللازم استعماله منها لرسم الأشكال التى بهذا الكتاب هو المسطرة والبرجل

والقضايا الآتية تستدعى استعمال هاتين الآلتين وهما كافيتان لاجراء ماتستلزمه كل منها وها هى

الأولى — يمكن مدّ مستقيم من أى نقطة مفروضة الى أى نقطة أخرى معلومة

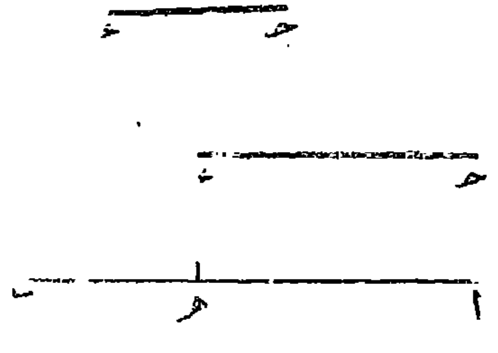
الثانية — يمكن مدّ مستقيم محدود على استقامته الى أن يبلغ أى طول

الثالثة — يمكن رسم دائرة من أى نقطة نعتبرها مركزا و بأى نصف قطر مهما كان طوله



ملاحظة ١ — يؤخذ من القضـية الثالثـة أنه لو أخذ طول اى مسـتقيم معلوم مثـل حـ ء بواسـطة البرجل وركز فى أى نقطة مفروضـة مثل م فانه يمكن رسم دائرة نصف قطرها مساو للمسـتقيم المعلوم حـ ء

و بعبارة أخرى يقال أنه بواسطة البرجل يمكن نقل الأبعاد من أى جهة الى أخرى



ملاحظة ٢ — وعلى ذلك ان فرضنا أن المستقيم ا ب كبر من المسـتقيم حـ ء يمكننا أن نأخذ على ا ب البعـد ا هـ مساويا حـ ء لأنه اذا ركز بالبرجل فى نقطة ا و ببعد يسـاوى حـ ء رسم قوس يقطع ا ب فى هـ فمن الواضح أن ا هـ يساوى حـ ء

تمهيد

١ الهندسة المستوية تبحث فى خواص الخطوط والأشكال المرسومة على السطح المستوى

٢ وينقسم هذا العلم الى عدّة أبحاث كل منها يسمى دعوى والدعوى نوعان نظرية وعملية
فالنظرية تتطلب اقامة البرهان على صحة عبارة هندسية
والعملية تتطلب انشاء عمل هندسى كرسم خط له صفة خاصة او شكل بصورة معينة

٣ وتتركب الدعوى من الأجزاء الآتية

١ — المنطوق العام ويبين الغرض من الدعوى بعبارة عامة

٢ — المنطوق الخاص ويتضمن البيان السابق بعبارة خاصة يرجع فى ايضاحها الى شكل يسهل به ادراك البرهان

٣ — العمل وهو رسم المستقيمات أو الدوائر التى يحتاج اليها لحل الدعاوى العملية أو اثبات الدعاوى النظرية

٤ — البرهان وهو الذى به تتبين صحة حل العملية أو صدق النظرية

٤ النتيجة وهى حقيقة مستخرجة من دعوى قام الدليل على صحتها فتلتحق عادة بها ولا تحتاج فى الغالب الى برهان جديد

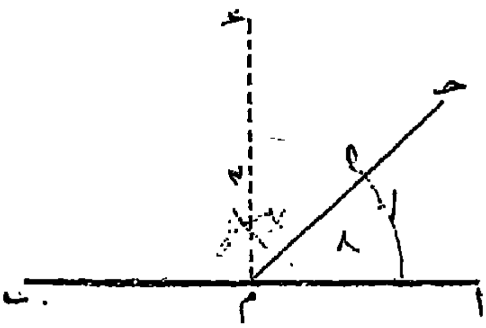
٥ والرموز الآتية مستعملة فى هذا الكتاب

الرمز	المدلول
∴	اذن
=	يساوى
∠	زاوية
Δ	مثلث
ق	زاوية قائمة

فى الخطوط والزوايا

نظرية ١

مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر وفى جهة واحدة منه يساوى ازاويتين قائمتين



اذا فرضنا أن المستقيم حـ م يصنع بتلاقيه مع المستقيم ا ب فى نقطة م الزاويتين المتجاورتين ا م حـ ، حـ م ب

فانه يطلب اثبات ان

∠ ا م حـ + ∠ حـ م ب = زاويتين قائمتين

لذلك نفرض اقامة العمود م ء على ا ب

البرهان ∠ ا م حـ + ∠ حـ م ب = ∠ ا م حـ + ∠ حـ م ء + ∠ ء م ب

كذلك ∠ ا م ء + ∠ ء م ب = ∠ ا م حـ + ∠ حـ م ء + ∠ ء م ب

∴ ∠ ا م حـ + ∠ حـ م ب = ∠ ا م ء + ∠ ء م ب

= زاويتين قائمتين وهو المطلوب .

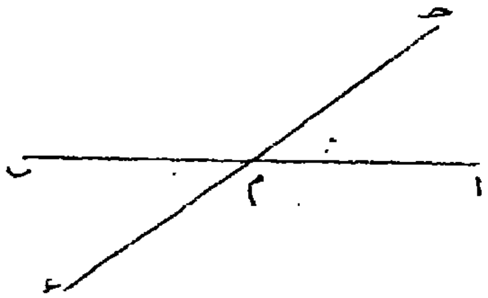
برهان آخر بواسطة الدوران

لو تصورنا أن المستقيم م حـ كان منطبقا على المستقيم م ا وأنه أخذ يدور حول م من الوضع م ا الى أن انطبق على م ب فانه بذلك يدور فى الحقيقة بقدر زاويتين قائمتين لأن ا م ب خط مستقيم

ومن حيث ان مقدار الزاويتين ا م حـ ، حـ م ب يساوى مقدار دوران م حـ حول م من الوضع م ا الى الوضع م ب

وهذا المقدار يساوى زاويتين قائمتين

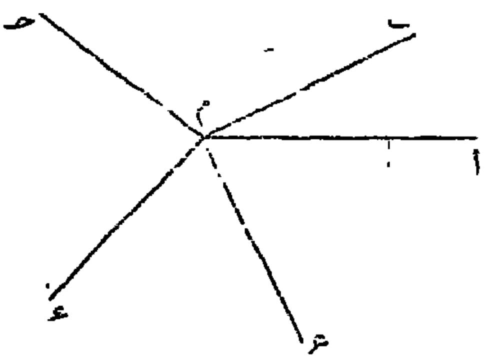
∴ ∠ ا م حـ + ∠ حـ م ب = زاويتين قائمتين



نتيجة ١ — اذا تقاطع مستقيمان فجموع الزوايا الأربع الحادثة من تقاطعهما يساوى أربع قوائم

أى أن

ﺟـ ا م حـ + ﺟـ حـ م ب + ﺟـ ب م ء + ﺟـ ء م ا = ٤ ق



نتيجة ٢ — اذا مدت عدة مستقيمات من نقطة واحدة فجموع الزوايا الحادثة المأخوذة واحدة بعد الأخرى يساوى أربع قوائم

لانه لو مد مستقيم من النقطة م ودار حولها وصنع على الترتيب الزوايا ا م ب ، ب م حـ ، حـ م ء ، ء م ﻫ ، ﻫ م ا فانه يتم دورة كاملة وبذلك يدور بقدر أربع زوايا قوائم

تعريفان

١ يقال للزاويتين اللتين مجموعهما يساوى قائمتين انهما متكاملتان وان كلا منهما مكملة للاخرى

فقى شكل نظرية (١) الزاويتان ا م حـ ، حـ م ب متكاملتان

وكذلك زاوية ١٢٣° مكملة لزاوية ٥٧°

٢ يقال للزاويتين اللتين مجموعهما يساوى قائمة واحدة انهما متتامتان وان كلا منهما متممة للاخرى

فقى شكل نظرية (١) الزاوية ء م حـ متممة للزاوية ا م حـ

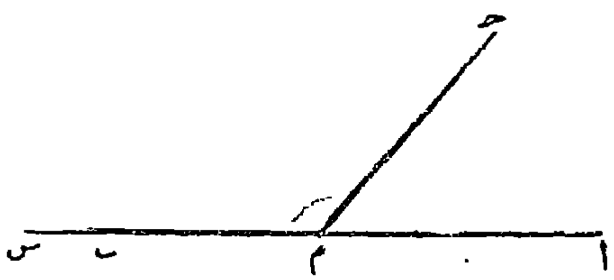
وكذلك زاوية ٣٤° متممة لزاوية ٥٦°

نتيجة ٣ — أولا — مكملات الزاوية الواحدة متساوية

ثانيا — متممات الزاوية الواحدة متساوية

نظرية ٢

اذا كان مجموع أى زاويتين متجاورتين مساويا قائمتين كان ضلعاهما المتطرفان على استقامة واحدة



اذا فرضنا أن مجموع الزاويتين المتجاورتين ا م ح ، ح م ب يساوى قائمتين
فانه يطلب اثبات أن ضلعيهما المتطرفين م ا ، م ب على استقامة واحدة
لذلك نمد ا م على استقامته الى س ويكفى أن نثبت أن

م س منطبق على م ب

البرهان — من حيث ان ا م س مستقيم بالعمل

∴	∠ ح م س تكمل ∠ ح م ا	(نظرية ١)
ولكن	∠ ح م ب تكمل ∠ ح م ا	بالفرض
∴	∠ ح م س = ∠ ح م ب	
∴ ينطبق المستقيمان	م س ، م ب	
ومن حيث ان	م س على استقامة ا م	بالعمل
يكون	م ب على استقامة ا م	وهو المطلوب

تمارين

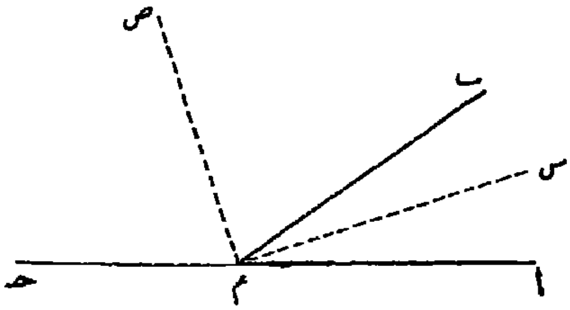
١ المطلوب ايجاد مكملات الزوايا الآتيـة وهى نصف زاوية قائمة ، أربعة أثلاث قائمة ، ٤٦° ، ١٤٩° ، ٨٣° ، ١٥ َ ١٠١°

٢ المطلوب ايجاد متممات الزوايا الآتية وهى خمسا زاوية قائمة ، ٢٧° ، ١٦ ٣٨° ، ٣٠ ً ٢٩ َ ٤١°

٣ اذا تقاطع مستقيمان وكانت احدى الزوايا الأربع الحادثة قائمة كانت كل من الثلاث الأخرى قائمة كذلك

٤ فى المثلث ا ب حـ الزاويتان ا ب حـ ، ا حـ ب متساويتان برهن على أنه لو مد الضلع ب حـ على استقامته فى كل من اتجاهيه لحدث أن الزاويتين الخارجتين الحادثتين متساويتان

٥ فى المثلث ا ب حـ الزاويتان ا ب حـ ، ا حـ ب متساويتان برهن على أنه لو مد كل من الضلعين ا ب ، ا حـ على استقامته تحت الضلع ب حـ لحدث أن الزاويتين الخارجتين الحادثتين متساويتان



تعريف — اذا مد أحد ضلعى زاوية على استقامته من جهة الرأس ثم نصفت هذه الزاوية بمستقيم ونصفت الزاوية المجاورة الحادثة بمستقيم آخر يقال للمستقيم الأول المنصف الداخل لهذه الزاوية وللثانى المنصف الخارج لها

ففى الشكل يقال ان م س المنصف الداخل للزاوية المعلومة ا م ب وان م ص المنصف الخارج لها

٦ برهن على أن منصفى زاويتين متجاورتين حادثتين من تلاقى مستقيم بآخر يحصران بينهما زاوية قائمة وبعبارة أخرى المنصفان الداخل والخارج لزاوية ما متعامدان

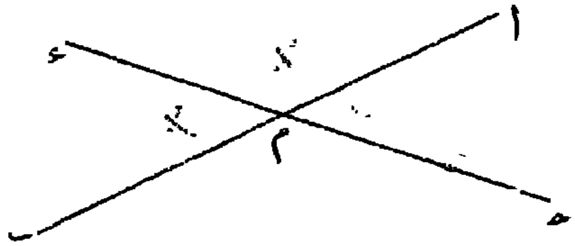
٧ برهن فى الشكل المتقدم على ان ∠ ا م س ، ∠ حـ م ص متتامتان

٨ برهن على أن الزاويتين ب م س ، حـ م س متكاملتان وأن الزاويتين ا م ص ، ب م ص متكاملتان أيضا

٩ اذا كانت الزاوية ا م ب = ٣٥ فما مقدار ∠ حـ م ص

نظرية ٣

اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان



اذا فرضنا أن ا ب ، ح ء تقاطعا فى م

فانه يطلب إثبات أولا أن ∠ ا م ح = ∠ ء م ب

ثانيا أن ∠ ا م ء = ∠ ح م ب

البرهان — من حيث ان المستقيم ا م يلاقى المستقيم ح ء فى م

∴ ∠ ا م ح + ∠ ا م ء = ٢ ق

أى أن ∠ ا م ح تكمل ∠ ا م ء

وكذلك ء م يلاقى ا ب فى م

∴ ∠ ء م ب + ∠ ا م ء = ٢ ق

أى أن ∠ ء م ب تكمل ∠ ا م ء

وعليه فكل من ∠ ا م ح ، ∠ ء م ب تكمل زاوية واحدة هى ا م ء

∴ ∠ ا م ح = ∠ ء م ب

وبالطريقة نفسها يبرهن على أن

∠ ا م ء = ∠ ح م ب وهو المطلوب

برهان آخر بطريقة الدوران

اذا تصورنا دوران المستقيم ا م ب حول النقطة م حتى ينطبق الجزء م ا على م ح يلزم أن ينطبق الجزء م ب على م ء لأن كلا من ا م ب ، ح م ء مستقيم

وعلى ذلك فمقدار الدوران اللازم لانعدام الزاوية ا م ح هو عين مقدار الدوران اللازم لانعدام الزاوية ب م ء

∴ ∠ ا م ح = ∠ ب م ء

تمارين على الزوايا

(مسائل عددية)

١ مامقدار الزوايا التي يدور فيها عقرب الدقائق أثناء تحركه مدة ٥ دقائق ، ٢١ دقيقة ، ٤٣ ١/٢ من الدقائق ، ١٠ ثانية ١٤ دقيقة وما هو الزمن الذي يستغرقه العقرب المذكور في دورانه زاوية مقدارها ٦٦° وأخرى مقدارها ٢٢٢°

٢ اذا ضبطت ساعة على الظهر فما مقدار كل من الزوايا التي دار فيها عقرب الساعات اذا كانت الساعة أولا ٤٥ دقيقة ٣ ساعة وثانيا ١٠ دقيقة ٥ ساعة

وما هي الساعة اذا دار هذا العقرب في زاوية مقدارها ١٧٢ ١/٢°

٣ تدور الأرض دورة تامة حول محورها في ٢٤ ساعة مامقدار الزاوية التي تدور فيها الأرض في ٢٠ دقيقة ٣ ساعة وما هو الزمن الذي تستغرقه في دورانها في زاوية مقدارها ١٣٠°

٤ في شكل نظرية ٣

(أولا) اذا كانت ∠ ب م ء = ٣٥° فما مقدار كل من الزوايا ا م ء ، ا م حـ ، حـ م ب بدون أن تقاس

(ثانيا) اذا كان مجموع الزاويتين ا م ء ، ب م حـ يساوي ٢٥٠° فما مقدار كل من الزاويتين ء م ب ، ا م حـ

(ثالثا) اذا كان مجموع الزوايا ا م حـ ، ا م ء ، ء م ب يساوي ٢٧٤° فما مقدار كل من الزوايا الأربع المجتمعة في م

(مسائل نظرية)

٥ اذا فرضت نقطة مثل م على المستقيم المعلوم ا ب ورسم منها المستقيمان م حـ ، م ء في كل من جهتيه على شرط أن ∠ حـ م ب = ∠ ء م ا فانه يراد إثبات ان م حـ يكون على استقامة ء م

٦ اذا تقاطع المستقيمان ا ب ، حـ ء في نقطة م وكان م س منصفا ∠ ب م ء فانه يراد إثبات أن امتداد س م ينصف ∠ ا م حـ

٧ اذا تقاطع المستقيمان ا ب ، حـ ء في نقطة م وكان م س منصفا ∠ ء م ب ، م ص منصفا ∠ حـ م ا فانه يراد إثبات أن المنصفين م س ، م ص على استقامة واحدة

(٨) اذا فرض أن م س ينصف ∠ ا م ب وطوى الجزءان س م ب ، س م ا أحدهما على الآخر حول م س فان المستقيم م ب ينطبق على م ا

وفي أي وضع يكون المستقيم م ا بالنسبة الى المستقيم م ب اذا كان

(أولا) ∠ ا م س أكبر من ∠ س م ب

(ثانيا) ∠ ا م س أصغر من ∠ س م ب

٩ المستقيمان ا ب ، حـ ء متقاطعان فى م ومتعامدان برهن على انه لو جعلنا ا ب حدًا فاصلا لجزأى الشكل وطوينا حوله أحد الجزأين على الآخر فان المستقيم م حـ ينطبق على م ء

١٠ اذا رسمنا المستقيم ا م ب على قطعة من الورق ثم طوينا جزأيها من نقطة م على شرط أن ينطبق ا م على م ب فانه يراد إثبات أن الخط الحادث من طى الورقة يكون عمودا على ا ب

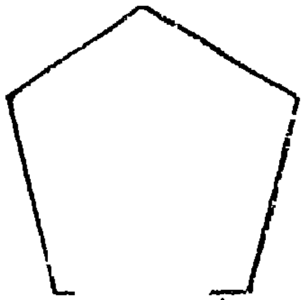
فى المثلثات

١ علمنا أن الشكل المستوى هو جزء من السطح المستوى محدود بخط أو أكثر
ويسمى مجموع الخطوط التى تحدد الشكل بمحيطه
ويسمى مقدار السطح المحصور فى المحيط بمساحة الشكل

٢ الأشكال المستقيمة الأضلاع هى المحدودة بخطوط مستقيمة

٣ المثلث هو شكل مستو محدود بثلاثة مستقيمات

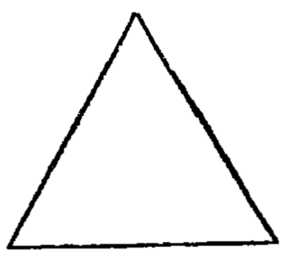
٤ الشكل الرباعى شكل مستو محدود بأربعة مستقيمات



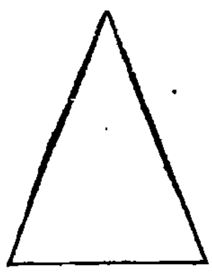
٥ كثير الأضلاع أو المضلع هو شكل مستو محدود بأكثر من أربعة مستقيمات

٦ ويقال لمستقيم الأضلاع انه متساوى الأضلاع اذا تساوت أضلاعه
ومتساوى الزوايا اذا تساوت زواياه
ومنتظم اذا كان متساوى الأضلاع والزوايا

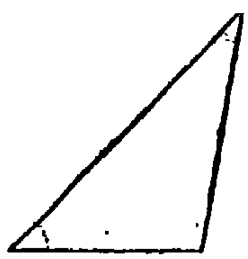
٧ والمثلث بالنسبة الى أضلاعه اما أن يكون متساوى الأضلاع اذا تساوت أضلاعه
ومتساوى الساقين اذا تساوى فيه ضلعان
ومختلف الأضلاع اذا كانت أضلاعه مختلفة الطول



مثلث متساوى الأضلاع

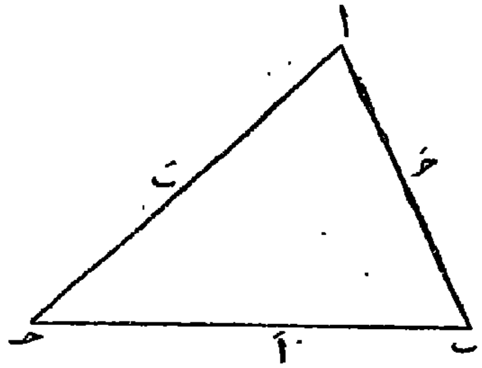


مثلث متساوى الساقين



مثلث مختلف الأضلاع

ولأجل الاختصار يعبر عن مقدار كل زاوية فى المثلث بالحرف الدال على رأسها ففى المثلث ا ب ح يعبر عن مقادير زواياه الثلاث بالحروف ا ، ب ، ح



وكثيرا مايرمز بالحروف اَ ، بَ ، حَ لأطوال أضلاع المثلث ويسمى الضلع باسم الزاوية التى تقابله فيسمى الضلع ب ح المقابل ا بالضلع اَ والضلع ا ح المقابل ب بالضلع بَ والضلع ا ب المقابل ح بالضلع حَ

ويمكن اعتبار أى رأس من رؤوس زوايا المثلث رأسا له وحينئذ يكون الضلع المقابل لهذا الرأس قاعدة له واذا كان المثلث متساوى الساقين كان رأسه عادة نقطة تقاطع ساقيه المتساويين وزاوية الرأس الزاوية المحصورة بين الساقين المتساويين

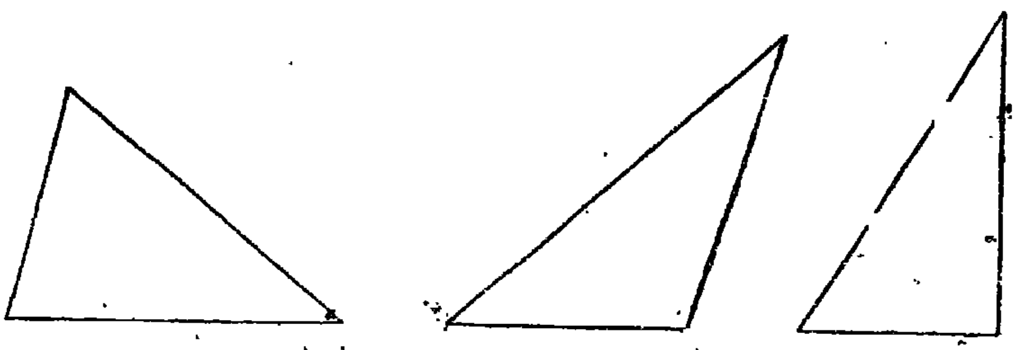
٨ والمثلث بالنسبة الى زواياه إما أن يكون

قائم الزاوية اذا كانت احدى زواياه قائمة

ومنفرج الزاوية اذا كانت احدى زواياه منفرجة

وحاد الزوايا اذا كانت زواياه الثلاث حادة

وسيتبين فى (نظرية ٨ نتيجة ٢) أنه يجب أن يكون فى كل مثلث زاويتان حادتان على الأقل



مثلث حاد الزوايا   مثلث منفرج الزاوية   مثلث قائم الزاوية

ويسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة فى المثلث القائم الزاوية وترا له

٩ المستقيم الواصل بين رأس المثلث ومنتصف قاعدته يسمى بالمستقيم المتوسط أو بنصف المثلث

المقـارنة بين مثلثين

المقارنة بين مثلثين إما ان تكون من حيث مساحتهما أو من حيث الأجزاء الســتة لكل منهــما وأجزاء المثلث الستة هى اضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث

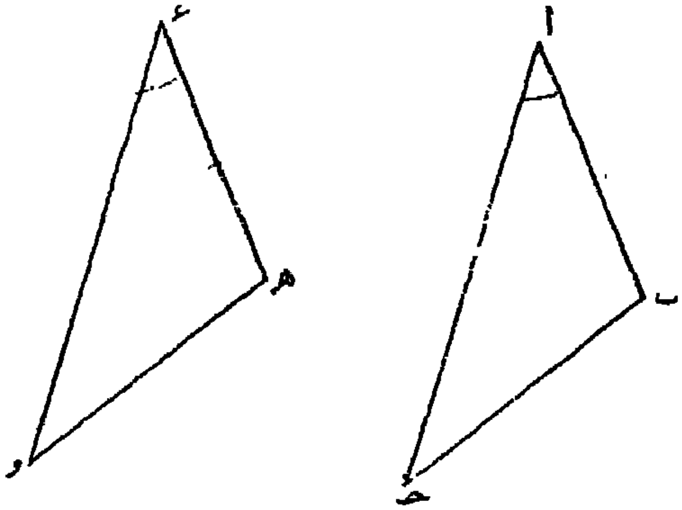
يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا أمكن انطباق أحدهما على الاخر انطباقا تاما وفى هــذه الحالة يكون كل جزء فى المثلث الأول مساويا لنظيره (أى الذى ينطبق عليه) فى المثلث الثانى ويكون المثلثان متساويين فى المساحة

والأضلاع المتناظرة فى المثلثين المتساويين هى التى تقابل زوايا متساوية والزوايا المتناظرة فيهما هى التى تقابل أضلاعا متساوية

ويقال للمثلثين اللذين يمكن أن تنطبق جميع أجزاء أحدهما على جميع أجزاء الآخر انهما متطابقان

نظرية ٤

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى فى كل ضلعان والزاوية المحصورة بينهما نظائرها فى الآخر



اذا كان فى المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و

ا ب = ء هـ

، ا حـ = ء و

والزاوية المحصورة ب ا حـ = الزاوية المحصورة هـ ءَ و

فانه يطلب إثبات ان Δ ا ب حـ = Δ ء هـ و من عامة الوجوه أى أنهما ينطبقان أحدهما على الآخر تمام الانطباق

البرهان — نطبق Δ ا ب حـ على Δ ء هـ و

على شرط أن النقطة ا تقع على النقطة ء

ويأخذ الضلع ا ب الاتجاه ء هـ

ومن حيث ان ا ب = ء هـ

∴ نقطة ب تقع على نقطة هـ

ومن حيث ان ا ب انطبق على ء هـ ، ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ء و

∴ ا حـ يقع على ء و

ومن حيث ان ا حـ = ء و

∴ نقطة حـ تقع على نقطة و

ومن حيث ان ب وقعت على هـ ، حـ على و

∴ الضلع ب حـ ينطبق على الضلع هـ و

وعلى ذلك فالمثلث ا ب حـ ينطبق على المثلث ء هـ و

وحينئذ فالمثلثان متساويان من عامة الوجوه وهو المطلوب

ملاحظة — ينبغى أن يميز دائما بين ماهو مفروض فى هذه النظرية وما يطلب البرهنة عليه

فالمفروض هو ا ب = ء هـ

، ا حـ = ء و

، ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ء و

ومن هذه الفروض تمكن البرهنة على أن المثلثين ينطبقان كل على الآخر تمام الانطباق

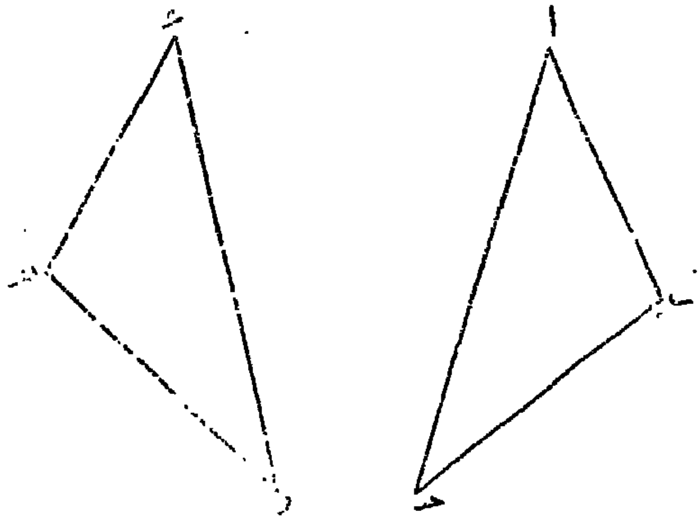
ومن ذلك نستنتج أن ب حـ = هـ و

وأن ∠ ا ب حـ = ∠ ء هـ و

وأن ∠ ا حـ ب = ∠ ء و هـ

وأن المثلثين متساويان فى المساحة

ويلاحظ ان الزاويتين اللتين برهنا على تساويهما فى المثلثين تقابل كل منهما ضلعا من المفروض تساويهما



تنبيه — قد يلزم أحيانا أنه لأجل انطباق المثلثين أحدهما على الآخر أن يعكس وضع أحدهما قبل تطبيقه وذلك ان كان المثلثان كما فى هذا الشكل

تمارين

١ المطلوب إثبات أن منصف زاوية الراس فى المثلث المتساوى الساقين (أولا) ينصف القاعدة (وثانيا) يكون عمودا عليها

٢ ا ب مستقيم معلوم أقمنا عليه من وسطه م العمود م ح برهن على أنه اذا أخذنا أى نقطة مثل ء على م ح ووصلنا بينها وبين ا ، ب يكون ء ا = ء ب

٣ برهن على أن ا ح ، ب ء قطرى المربع ا ب ح ء متساويان على فرض أن أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم

٤ ا ب ح ء مربع والنقط ه ، و ، ع منتصفات الأضلاع ا ب ، ب ح ، ح ء برهن على ان

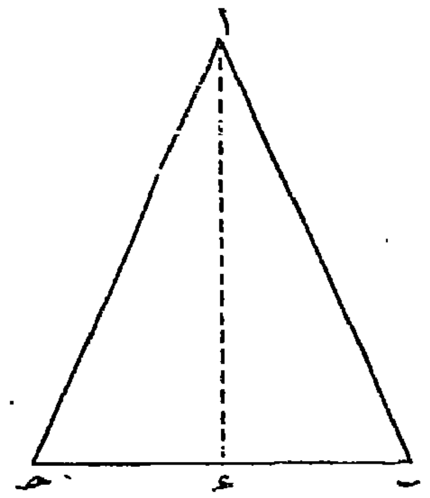
(أولا) ه و = و ع	(ثالثا) ا و = و ء
(ثانيا) ا ع = ا و	(رابعا) ب ع = ء و

ارسم شكلا خاصا لكل حالة على حدتها

٥ ا ب ح مثلث متساوى الساقين أخذنا على ساقيه ا ب ، ا ح البعدين المتساويين ا ص ، ا س ثم وصلنا ص ح ، س ب برهن على أن ص ح = س ب

نظرية ٥

زاويتا قاعدة المثلث المتساوى الساقين متساويتان



اذا فرضنا أن ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه ا حـ = ا ب
فانه يطلب إثبات أن ∠ ا ب حـ = ∠ ا حـ ب

لذلك نفرض أن المستقيم ا ء ينصف ∠ ب ا حـ وان ء هى نقطة تقابل المنصف المذكور بالضلع ب حـ

البرهان — فى △ ا ب ء ، △ ا حـ ء

من حيث ان { ا ب = ا حـ ، ا ء مشترك بين المثلثين ، ∠ ب ا ء = ∠ حـ ا ء }

∴ ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق (نظرية ٤)

وبذلك ∠ ا ب ء = ∠ ا حـ ء وهو المطلوب

وهناك برهان آخر وهو

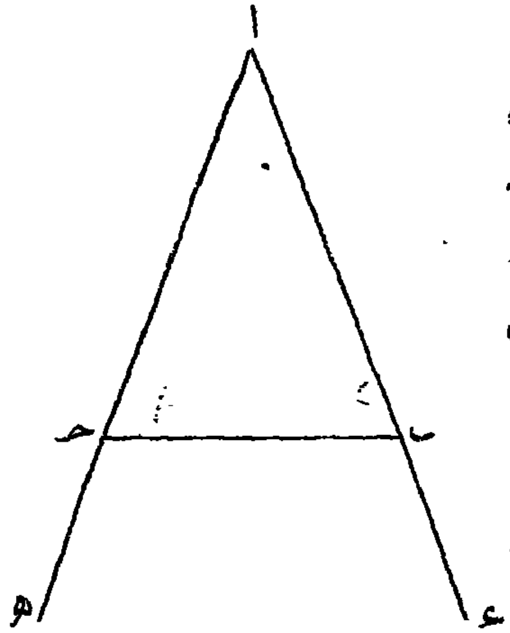
نتصور طى جزأى △ ا ب حـ حول المستقيم ا ء

فمن حيث ان ∠ ب ا ء = ∠ حـ ا ء

يقع الضلع ا ب على الضلع ا حـ

ومن حيث انهما متساويان تقع نقطة ب على نقطة حـ وعلى ذلك ينطبق ب ء على حـ ء

∴ ∠ ا ب ء تنطبق على ∠ ا حـ ء وبذلك تتساويان . وهو المطلوب



نتيجة ١ — اذا مدّ كل من الساقين ا ب ، ا ح من المثلث المتساوى الساقين ا ب ح على استقامته فان كلا من الزاويتين الخارجتين ح ب ء ، ب ح هـ تكون مساوية للأخرى لأن كلا منهما تكمل احدى زاويتى القاعدة المتساويتين

نتيجة ٢ — اذا كان المثلث متساوى الأضلاع فانه يكون متساوى الزوايا ايضا

تعريف — يقال ان فى الشكل تماثلا بالنسبة الى خط معلوم فيه متى أمكن طى الشكل بحيث ينطبق جزءاه اللذان يفصلهما ذلك الخط كل على الآخر

ويسمى المستقيم الذى يقسم الشكل الى جزأين متماثلين محور التماثل

ومن الواضح أن هذا الانطباق لايتأتى إلا اذا اتحد الجزءان المتقابلان مساحة وشكلا وتماثلا فى وضعهما بالنسبة الى محور التماثل

اذا تقررهذا فبواسطة نظرية ٥ يمكن البرهنة على أن منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يقسمه الى جزأين متماثلين ومنصف أى زاوية فى المثلث المتساوى الأضلاع يقسمه الى جزأين متماثلين

تمارين

١ ا ب ح ء شكل رباعى أضلاعه متساوية برهن على أنه لو وصلنا القطر ب ء لحدث ان

ــــ ا ب ء = ــــ ا ء ب

، ــــ ح ب ء = ــــ ح ء ب

، ــــ ا ب ح = ــــ ا ء ح

٢ ا ب ح ، ء ب ح مثلثان متساويا الساقين مرسومان فى جهتى قاعدة مشتركة بينهما وهى ب ح برهن (بواسطة نظرية ٥) على أن ــــ ا ب ء = ــــ ا ح ء

٣ ا ب ح ، ء ب ح مثلثان متساويا الساقين لهما قاعدة مشتركة وهى ب ح وهما مرسومان فى جهة واحدة منها ويراد إثبات أن

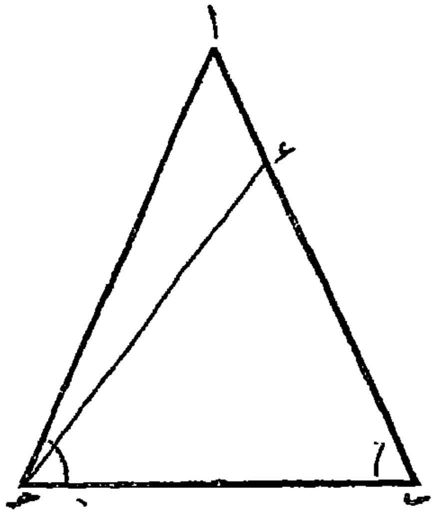
ــــ ا ب ء = ــــ ا ح ء (بواسطة نظرية ٥)

٤ ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح فاذا نصفنا ا ب بالنقطة ل ، ب ح بالنقطة م ، ح ا بالنقطة ن فانه يراد إثبات أن

(اولا) ل م = ن م (ثانيا) ب ن = ح ل (ثالثا) ــــ ا ل م = ــــ ا ن م

نظرية ٦

اذا تساوىَ فى المثلث زاويتان فان الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين



اذا فرضنا ان ا ب ح مثلث فيه

ـ ا ب ح = ـ ا ح ب

فانه يطلب إثبات أن الضلع ا ح = الضلع ا ب

لذلك نقول ان لم يكن ا ب ، ا ح متساويين كان أحدهما ا ب مثلا أكبر من الآخر

وعلى ذلك نأخذ البعد ب ى على ب ا مساويا للضلع ا ح ثم نصل ى ح

البرهان — فى ∆ ى ب ح ، ∆ ا ح ب

من حيث ان { ى ب = ا ح ، ب ح مشترك والزاوية المحصورة ى ب ح = الزاوية المحصورة ا ح ب }

∴ ∆ ى ب ح = ∆ ا ح ب فى المساحة (نظرية ٤)

أى أن الجزء يساوى الكل وهو محال

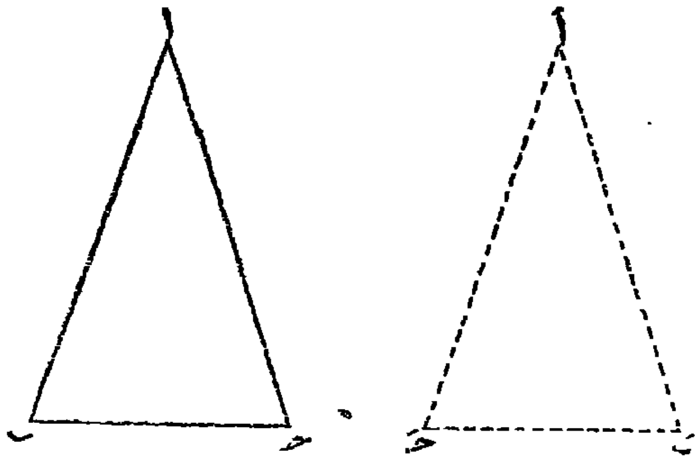
∴ لا يمكن ان يكون ا ب ، ا ح غير متساويين

أى أن الضلع ا ب = الضلع ا ح وهو المطلوب

نتيجة — المثلث المتساوى الزوايا متساوى الأضلاع

ملاحظة على نظريتى ٥ و ٦

يمكن تحقيق هاتين النظريتين عملا وذلك بأن نرسم مثلثا متساوى الساقين على قطعة من الورق ثم نفصله منها ونقلب وضعه الأصلى فاذا وضعناه فى مكانه الخالى الذى كان يشغله أولا شغله تماما



فاذا فرضنا أن اَ بَ حَ كان الوضع الأصلى للمثلث ا ب ح وان ا ح ب هو عين المثلث مقلوب الوضع نرى أنه عند تطبيق النقطة ا على النقط اَ كما فى نظرية ٥ تقع النقطة ب على النقطة ح والنقطة ح على النقطة بَ

ونرى كما فى نظرية ٦ أنه عند تطبيق النقطة ح على النقطة بَ والنقطة ب على النقطة حَ تقع النقطة ا على النقطة اَ

وفى كلتا الحالتين نرى أن المثلث المقلوب وضعه انطبق على الأصلى وعلى ذلك فالضلع والزاوية فى الجهة اليمنى من المثلث مساويان للضلع والزاوية فى الجهة اليسرى منه

(ملاحظة على النظرية وعكسها)

يشمل منطوق كل نظرية ركنين الأول يدل على الشروط المعلومة وهو ما يعبر عنه بالفرض والثانى يدل على مايطلب البرهنة عليه ويعبر عنه بالناتج

فمثلا فى منطوق نظرية ٥ الفرض هو أن فى ∆ ا ب ح الضلع ا ح = الضلع ا ب

وبواسطة هذا الفرض يطلب البرهنة على أن ∠ ا ب ح = ∠ ا ح ب وهذا هو الناتج

فان عكسنا الأمر وجعلنا فرض نظرية ناتجا وناتجها فرضا حصلنا على نظرية أخرى تسمى عكس الأولى

فمثلا فى نظرية ٥	الفرض هو أن	ا ح = ا ب
	والناتج هو أن	∠ ا ب ح = ∠ ا ح ب
وفى نظرية ٦	الفرض هو أن	∠ ا ب ح = ∠ ا ح ب
	والناتج هو أن	ا ح = ا ب

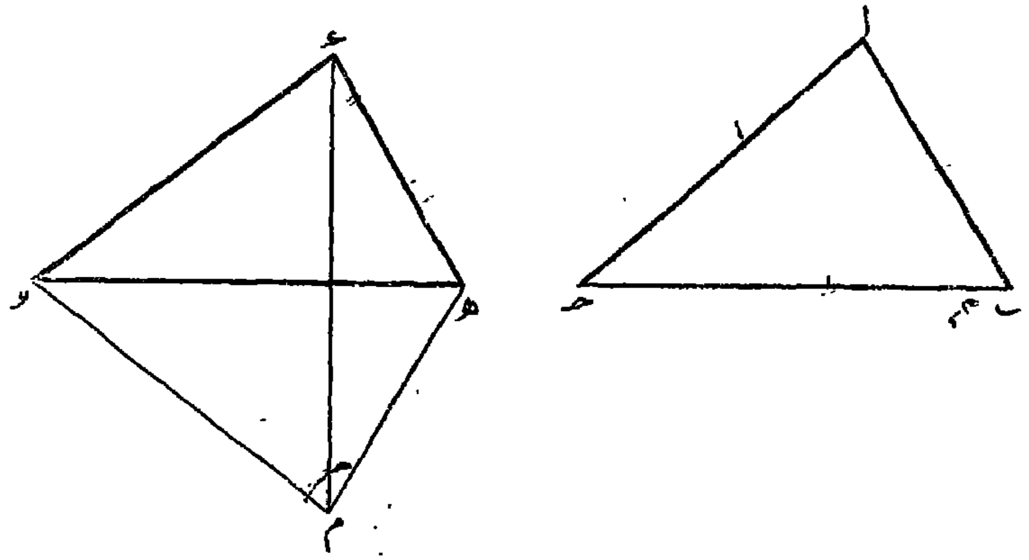
ومن ذلك نرى أن نظريتى ٥ و ٦ متعاكستان لأن فرض الأولى ناتج للثانية وفرض الثانية ناتج للاولى

هذا وينبغى أن نلاحظ أننا فى نظرية ٦ لم نتبع طريقة البرهنة على صحة الناتج نفسه بل أقمنا الدليل على عدم إمكان غير الصحة اذ لو سلمنا بغير صحة المطلوب من النظرية لحصلنا على ناتج غير ممكن عقلا وتسمى هذه الطريقة بطريقة البرهان المؤدى الى خلاف الفرض وهى مستعملة كثيرا فى الهندسة لا سيما فى عكس بعض مايتقدم من النظريات

ولا يلزم من كون النظرية صحيحة أن يكون عكسها كذلك (راجع صفحة ٢٨)

نظرية ٧

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر



اذا فرضنا أن ا ب ح ، ء هـ و مثلثان فيهما

ا ب = ء هـ

، ا ح = ء و

، ب ح = هـ و

فانه يطلب إثبات أن هذين المثلثين متساويان من عامة الوجوه

البرهان — نتصور وضع المثلث ا ب ح تحت المثلث ء هـ و على شرط أن ينطبق الضلع ب ح على مساويه هـ و ويأخذ الضلع ا ب الوضع م هـ والضلع ا ح الوضع م و ثم نصل ء م .

فمن حيث أن هـ ء = هـ م

∴ ∠ هـ م ء = ∠ هـ ء م (نظرية ٥)

ومن حيث أن و ء = و م

∴ ∠ و م ء = ∠ و ء م

وعلى ذلك فالزاوية الكلية هـ ء و = الزاوية الكلية هـ م و

أى أن ∠ هـ ء و = ∠ ب ا ح

وفى △ ب ا ح ، △ هـ ء و

من حيث ان { ب ا = هـ د ، ا حـ = د و ، ∠ ب ا حـ = ∠ هـ د و }

∴ هذان المثلثان متساويان من عامة الوجوه (نظرية ٤) وهو المطلوب

تنبيه — في هذه النظرية

الفرض هو ا ب = د هـ ، ب حـ = هـ و ، حـ ا = و د

والناتج هو ∠ حـ = ∠ و ، ∠ ا = ∠ د ، ∠ ب = ∠ هـ

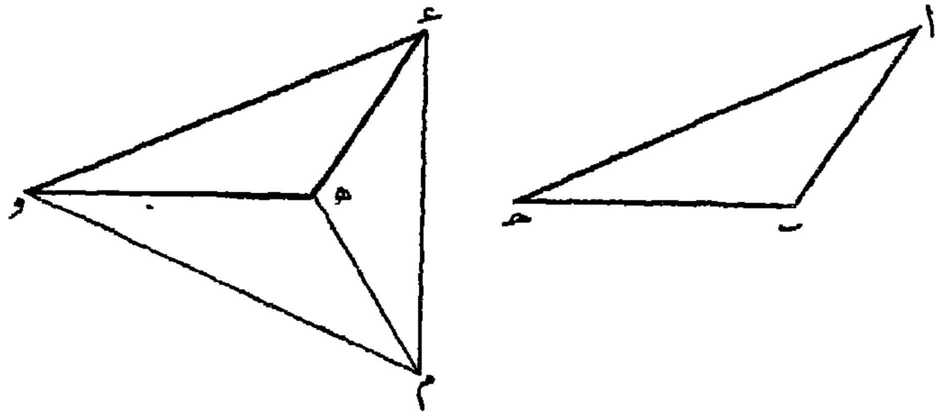
والمثلثان متساويان في المساحة

ونرى مما تقدم أن الزوايا التي يراد البرهنة على تساويها تقابل أضلاعا مفروضا تساويها

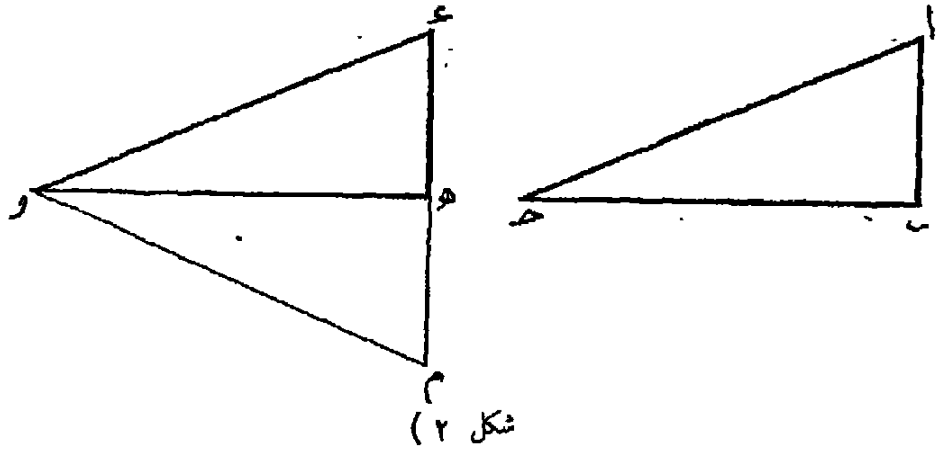
ملاحظة ١ — نرى أن المستقيم د م في النظرية المتقدمة وقع داخل الشكل ويجوز ان يكون له وضع آخر وذلك في حالتين

الأولى : أن يقع المستقيم د م خارج الزاويتين هـ د و ، هـ م و بأن كان المثلثان منفرجي الزاوية كما في شكل ١

والثانية : أن ينطبق المستقيم د م على كل من د هـ ، هـ م بأن كان المثلثان قائمي الزاوية كما في شكل ٢



(شكل ١)



(شكل ٢)

وفى البرهنة على النظرية المتقدمة اذا كان المثلثان قائمى الزاوية أومنفرجيها يمكن عدم مراعاة هذه الحالة وذلك اذا اخترنا تطبيق أكبر الأضلاع فى كل من المثلثين فيؤول الأمر اذن الى أن المستقيم ء م يقع داخل الشكل كما تقدم فى شكل النظرية

ملاحظة ٢ — يقال إن المثلثين متساويان فى الزوايا اذا ساوت كل زاوية من أحدهما نظيرتها من الآخر وعلى ذلك اذا ساوى فى المثلثين كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر فالمثلثان متساويان فى الزوايا

على التلميذ أن يبين عكس هذه النظرية ويرسم شكلا يبين فيه أنه لايلزم أن يكون العكس صحيحا

تنبيه — من المستحسن أن يدرس بعد هذه النظرية الدعاوى العملية ١ — ٥ وكذلك عملية ٨ (راجع صفحة ٧٥) لأن فى براهينها ايضاحا لانطباق المثلثين

تمارين على تطابق المثلثين فى نظريتى ٤ و ٧

(مسائل نظرية)

١- برهن على أن المستقيم الواصل من رأس المثلث المتساوى الساقين الى وسط قاعدته
(أولا) ينصف زاوية الرأس
(ثانيا) يكون عمودا على القاعدة

٢ ا ب حـ ء معين (وهو شكل رباعى أضلاعه متساوية) برهن على أنه ان وصلنا القطر ا حـ يحدث
(أولا) ان ∠ ا ب حـ = ∠ ا ء حـ
(ثانيا) ان ا حـ ينصف كلا من زاويتى ب ا ء ، ب حـ ء

٣ اذا كان فى الشكل الرباعى ا ب حـ ء كل ضلعين متقابلين متساويان أعنى أن
ا ب = حـ ء ، ا ء = حـ ب فبرهن على أن ∠ ا ء حـ = ∠ ا ب حـ

٤ المثلثان ا ب حـ ، ء ب حـ متساويا الساقين ومتحدا القاعدة ب حـ برهن (بواسطة نظرية ٧) على أن ∠ ا ب ء = ∠ ا حـ ء (أولا) فى حالة ما اذا كان المثلثان فى جهة واحدة من القاعدة (وثانيا) فى حالة ما اذا كانا فى جهتيها

٥ المثلثان ا ب حـ ، ء ب حـ متساويا الساقين ومتحدا القاعدة ب حـ ومرسومان عليها كل فى جهة من جهتيها برهن على أنه لو وصلنا ا ء لكان منصفا لكل من زاويتى ب ا حـ ، ب ء حـ

٦ المطلوب اثبات أن المستقيمين الواصلين من طرفى قاعدة مثلث متساوى الساقين الى منتصفى ساقيه متساويان

٧ اذا فرضت نقطتان على قاعدة مثلث متساوى الساقين وكانتا متساويتى البعد عن طرفى القاعدة فانهما تكونان متساويتى البعد عن رأس المثلث

٨ برهن على أن المثلث الحادث من توصيل منتصفات اضلاع المثلث المتساوى الأضلاع يكون متساوى الأضلاع

٩ المثلث ا ب حـ متساوى الساقين فيه ا ب = ا حـ فاذا نصفنا كلا من الزاويتين ب ، حـ بالمنصفين ب م ، حـ م حدث أن
(أولا) ب م = حـ م
(ثانيا) ا م ينصف الزاوية ب ا حـ

١٠ برهن على أن قطرى المعين (راجع تمرين ٢) ينصف كل منهما الآخر ويكونان متعامدين

١١ المثلث ا ب حـ متساوى الساقين فيه ا ب = ا حـ فاذا مددنا الساق ب ا من جهة ا على استقامته الى ء وكذلك مددنا حـ ا من جهة ا على استقامته الى هـ على شرط أن ا ء = ا هـ ثم وصلنا هـ ب ، ء حـ حدث أن هـ ب = ء حـ

تمارين على المثلثات
(عددية وتخطيطية)

١ المطلوب رسم المثلث ا ب حـ الذى طول ضلعه اَ = ٥ سنتيمترات والضلع بَ = ٥,٥ من السنتيمترات ٬ حـَ = ٣,٦ من السنتيمترات وقياس كل من زواياه وايجاد مقدار مجموعها

٢ فى المثلث ا ب حـ الضلع ا = ٧,٥ من السنتيمترات ٬ بَ = ٧ سنتيمترات ٬ حـ = ٦,٥ من السنتيمترات والمطلوب رسم العمود النازل من ب على ا حـ وقياسه

٣ المطلوب رسم المثلث ا ب حـ الذى ضلعه اَ = ٧ سنتيمترات ٬ بَ = ٦ سنتيمترات ٬ ∠ حـ = ٦٥° واثبات (نظريا وعمليا) أن أى مثلثين تتوفر فيهما هذه الفروض يتحدان مساحة وشكلا

٤ المطلوب رسم المثلث على فرض أن بَ = ٤ سنتيمترات ٬ حـَ = ٥ سنتيمترات ٬ ∠ ا = ٥٧° وايجاد طول الضلع ا بقياسه وكذا قياس كل من الزاويتين ب ٬ حـ

ارسم مثلثا آخر باستعمال المقادير التى وجدتها لكل من ا والزاويتين ب ٬ حـ وقس فيه الضلعين بَ ٬ حـَ و ∠ ا واذكر ماتستنتجه من ذلك

٥ سلم مرتكز على حائط تبعد قاعدته عن هذا الحائط بمقدار ٢,٤ من الأمتار ورأسه على شباك مرتفع عن الأرض بقدر ٧ أمتار والمطلوب رسم شكل يبين فيه وضع السلم على شرط أن يكون مقياس الرسم سنتيمترا واحدا لكل متر وايجاد طول السلم بقياسه من الرسم

٦ مشى شخص من نقطة معلومة متجها نحو الشمال ٩٩ مترا ثم اتجه نحو الشرق فمشى ٢٠ مترا والمطلوب ايضاح ذلك برسم (يكون مقياسه سنتيمترا لكل عشرة أمتار) وايجاد بعد الشخص عن نقطة القيام بقياس هذا البعد بأقرب ما يمكن من الحقيقة

٧ طول ظل قضيب من الخشب عندما تكون الشمس فوق الأفق بقدر ٤٢° هو ١٠ أمتار والمطلوب رسم شكل يبين ذلك ويكون مقياس الرسم فيه سنتيمترا لكل متر ثم ايجاد طول القضيب التقريبى بقياسه من الرسم المذكور

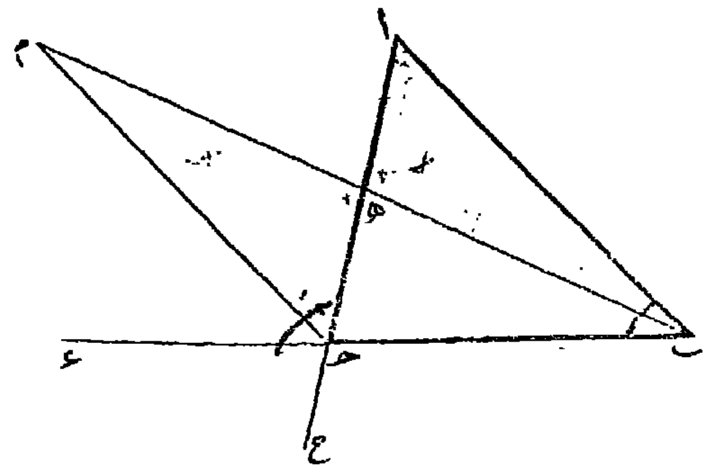
٨ خرج مساح من النقطة المعينة ا واتجه نحو الشرق ومشى ١٥٠ مترا حتى وصل الى نقطة ب ثم اتجه نحو الشمال ومشى ٣٠٠ متر حتى وصل الى نقطة حـ ثم اتجه نحو الغرب ومشى ٤٥٠ مترا فوصل الى ء والمطلوب عمل الرسم البيانى لسير هذا الرجل (مقياس الرسم سنتيمتر لكل ٥٠ مترا) وايجاد بعد ء عن ا بالتقريب وكذا قياس ∠ ء ا ب مبينا اتجاه ء بالنسبة الى ا

٩ النقطتان ب ٬ حـ واقعتان على شاطئ نهر مستقيم ومبتعدتان بقدر ٢٦٠ مترا فاذا كانت ا سفينة راسية فى النهر ٬ ∠ حـ ب ا تساوى ٣٣° ٬ ∠ ب حـ ا = ٨١° فانه يراد عمل الرسم البيانى الذى يستدل منه بوجه التقريب على بعد السفينة عن ب ٬ حـ وكذا بعدها عن أقرب نقطة على الشاطئ المذكور

١٠ لزم أثناء مسح مزرعة أن يعرف البعد بين النقطتين ا ٬ ب وكان بينهما بحيرة يتعذر المرور فيها وبذلك تعذر قياس البعد بينهما مباشرة فأخذ المساح نقطة ثالثة وهى حـ يمكنه أن يصل منها الى كل من ا ٬ ب فوجد أن حـ ا = ٢٤٥ مترا ٬ حـ ب = ٣٢٠ مترا وان ∠ ا حـ ب = ٤٢° والمطلوب عمل رسم يبين البعد التقريبى بين النقطتين المفروضتين

نظرية ٨

اذا مدّ أحد أضلاع المثلث على استقامته كانت الزاوية الخارجة الحادثة أكبر من أى زاوية داخلة ماعدا المجاورة لها



اذا فرضنا أن ا ب ح مثلث ومددنا ضلعه ب ح على استقامته الى ء

فانه يطلب اثبات أن الزاوية الخارجة ا ح ء اكبر من كل من ∠ ا ب ح ، ∠ ب ا ح

لذلك نفرض أن ه منتصف ا ح

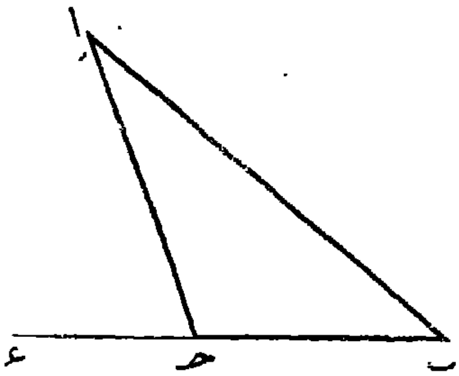
ونصل ب ه ونمدّه على استقامته ونأخذ على امتداده البعد ه م = ب ه ثم نصل م ح

البرهان — فى المثلثين ا ه ب ، ح ه م

		١	ا ه = ح ه
من حيث ان		،	ه ب = ه م
		،	∠ ا ه ب = ∠ ح ه م	لتقابلهما بالرأس
∴	ينطبق Δ ا ه ب على Δ ح ه م		(نظرية ٤)
فتكون	∠ ب ا ه = ∠ ه ح م		
لكن	∠ ه ح ء اكبر من ∠ ه ح م		
∴	∠ ا ح ء أكبر من ∠ ب ا ح		

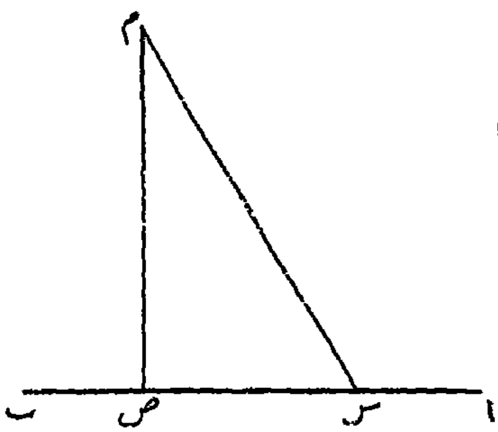
وبالطريقة عينها يقال اذا مدّ ا ح على استقامته الى ع ووصل من ا الى منتصف ب ح بمستقيم تسهل البرهنة على أن ∠ ب ح ع أكبر من ∠ ا ب ح

لكن	∠ ب ح ع = ∠ ا ح ء	لتقابلهما بالرأس
∴	∠ ا ح ء أكبر من ∠ ا ب ح	وهو المطلوب



نتيجة ١ — مجموع أى زاويتين فى المثلث أصغر من قائمتين
وللبرهنة على ذلك نقول من حيث ان
ـ ا ب ح أصغر من ـ ا ح ء كما تقدّم
فاذا أضفنا الى كل منهما ـ ا ح ب
حدث أن ـ ا ب ح + ـ ا ح ب أصغر من ـ ا ح ء + ـ ا ح ب
أى أن مجموع أى زاويتين مثل ا ب ح ، ا ح ب أصغر من قائمتين

نتيجة ٢ — يجب أن يكون فى كل مثلث من الزوايا الحادة اثنتان على الأقل
لأنه بناء على النتيجة السابقة اذا كان فى المثلث زاوية منفرجة أوقائمة يلزم أن يكون كل من الزاويتين الأخريين أقل من قائمة



نتيجة ٣ — لا يمكن أن ينزل من نقطة خارج مستقيم إلا عمود واحد عليه

لو امكن انزال عمودين مثل م س ، م ص من نقطة مثل م على المستقيم ا ب لكان فى المثلث م س ص زاويتان قائمتان وهما م س ص ، م ص س وهذا محال

تمارين

١ برهن على نتيجة ١ فى النظرية السابقة بواسطة وصل النقطة ا بأى نقطة من نقط القاعدة ب ح

٢ ا ب ح مثلث ، ء نقطة داخله فاذا وصلنا ب ء ، ح ء فبرهن على أن ـ ب ء ح أكبر من ـ ب ا ح بواسطة العمليتين الآتيتين
(الأولى) مد ب ء على استقامته حتى يقابل ا ح
(الثانية) وصل ا ء ومده على استقامته جهة القاعدة

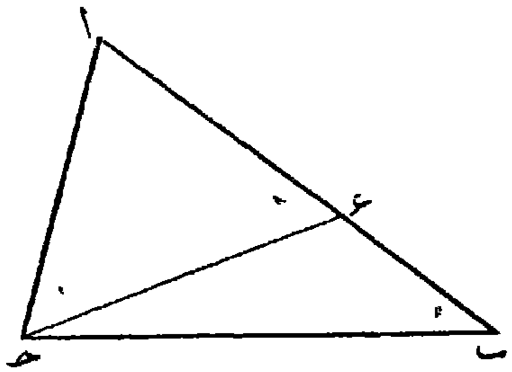
٣ اذا مد أحد أضلاع مثلث على استقامته فى كلتا جهتيه فان الزاويتين الخارجتين الحادثتين أكبر من قائمتين

٤ لا يمكن أن يمد الى مستقيم من نقطة خارجة عنه أكثر من مستقيمين كل منهما يساوى طولا معلوما

٥ اذا مد كل من ساقى المثلث المتساوى الساقين على استقامته فان كلا من الزاويتين الخارجتين منفرجة

نظرية ٩

الضلع الأكبر فى أى مثلث تقابله الزاوية الكبرى

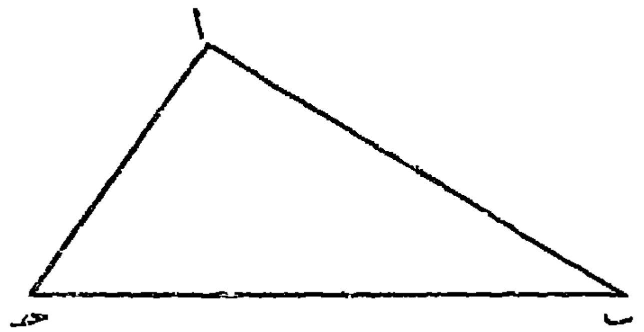


فى المثلث ا ب حـ الضلع ا ب أكبر من الضلع ا حـ ·
ويطلب البرهنة على أن ∠ ا حـ ب أكبر من ∠ ا ب حـ
لذلك نأخذ على ا ب البعد ا ء = ا حـ ونصل حـ ء
البرهان — من حيث ان ا حـ = ا ء
∴ ∠ ا ء حـ = ∠ ا حـ ء (نظرية ٥)
ولكن ∠ ا ء حـ خارجة بالنسبة الى المثلث ب ء حـ
∴ ∠ ا ء حـ أكبر من ∠ ء ب حـ التى هى ∠ ا ب حـ
∴ ∠ ا حـ ء أكبر من ∠ ا ب حـ
ومن باب أولى ∠ ا حـ ب أكبر من ∠ ا ب حـ وهو المطلوب

ملاحظة — طريقة البرهان فى النظرية الآتيـة تعرف بطريقة الاستقصاء ويمكن اتباعها اذا لم يكن بد من صحة حالة واحدة من عدة حالات مفروضـة فمتى قام البرهان على عدم صحة كل الحالات ما عدا احداها تثبت صحة هذه الحالة

نظرية ١٠

الزاوية الكبرى فى أى مثلث يقابلها الضلع الأكبر



فى المثلث ا ب حـ الزاوية ا حـ ب أكبر من الزاوية ا ب حـ

ويطلب البرهنة على ان الضلع ا ب أكبر من الضلع ا حـ

البرهان — ان لم يكن ا ب أكبر من ا حـ

فإما أن يساويه وإما أن يكون اصغر منه

فان كان ا ب = ا حـ

لزم أن تكون ∠ ا حـ ب = ∠ ا ب حـ (نظرية ٥)

وهذا خلاف الفرض

وان كان ا ب أصغر من ا حـ

لزم أن تكون ∠ ا حـ ب أصغر من ∠ ا ب حـ

وهذا خلاف الفرض أيضا

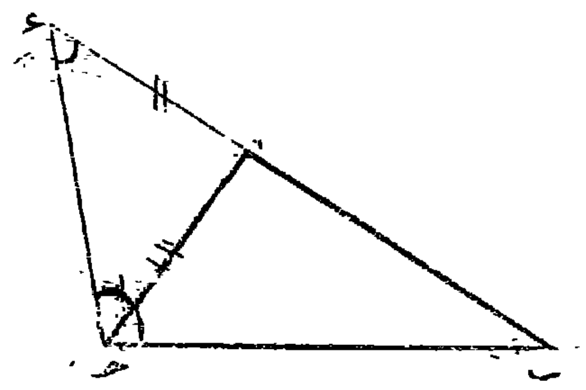
وعلى ذلك فالضلع ا ب لايمكن أن يساوى ا حـ كما أنه لايمكن أن يكون أصغر منه

∴ ا ب يجب أن يكون أكبر من ا حـ وهو المطلوب

(للتمارين على نظريتى ٩ ، ١٠ راجع صفحة ٣٨)

نظرية ١١

أى ضلع فى المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين



اذا فرضنا أن ا ب حـ مثلث

فانه يطلب اثبات أن أى ضلع فيه أصغر من مجموع ضلعيه الآخرين

فاذا كان ب حـ أكبر ضلع فى المثلث فانه يكفى أن يبرهن على أن مجموع ب ا ، ا حـ أكبر منه

ولذلك نمدّ ب ا على استقامته ونأخذ على امتداده البعد ا ء = ا حـ ثم نصل ء حـ

البرهان — من حيث ان ا ء = ا حـ

∴ ∠ ا حـ ء = ∠ ا ء حـ (نظرية ٥)

ولكن ∠ ب حـ ء أكبر من ∠ ا حـ ء

∴ ∠ ب حـ ء أكبر من ∠ ا ء حـ أى ∠ ب ء حـ

وعلى ذلك ففى △ ب ء حـ يكون

ب ء أكبر من ب حـ (نظرية ١٠)

لكن ب ء = مجموع ب ا ، ا حـ

∴ ب حـ أصغر من مجموع ب ا ، ا حـ وهو المطلوب

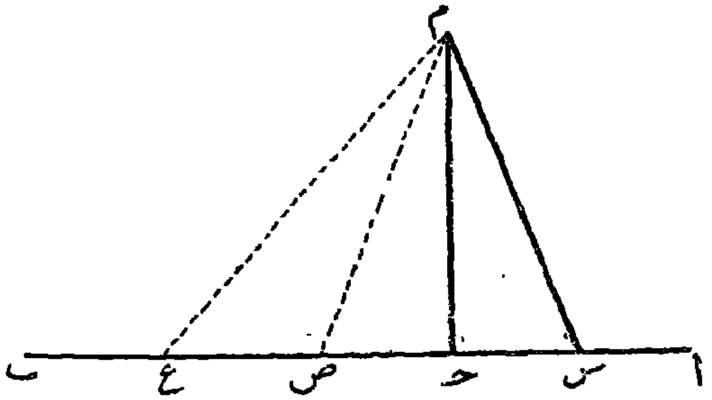
تنبيـه — صحة هـذه النظرية واضحة بلا اثبات وانمـا أوردنا البرهان السابق تمرينـا على ماتقدم من النظريات

اما وضوح صحة النظرية فلأنه اذا تحركت نقطة من ب الى حـ على المستقيم ب حـ تقطع مسافة أقصر مما لو تحركت من ب الى ا ثم من ا الى حـ وبعبارة أخرى

أقرب بعد بين نقطتين هو المستقيم الواصل بينهما

نظرية ١٢

العمود هو أقصر المستقيمات التى تخرج من نقطة مفروضة الى مستقيم معلوم



اذا فرضنا أن م حـ هو العمود النازل من النقطة المفروضة م على المستقيم المعلوم ا ب وأن م س مائل مّا واصل منها الى ا ب

فانه يطلب اثبات ان م حـ أقصر من م س

البرهان — فى المثلث م حـ س

من حيث ان ∠ م حـ س قائمة

∴ ∠ م س حـ أصغر من قائمة (نتيجة نظرية ٨)

أى أن ∠ م س حـ أصغر من ∠ م حـ س

∴ م حـ أصغر من م س (نظرية ١٠)

وهو المطلوب

نتيجة ١ — وبالعكس : من حيث انه من نقطة مفروضة خارج مستقيم لا يمكن أن ينزل إلا عمود واحد عليه وأنه لا يمكن أن يوجد إلا مستقيم واحد أقصر من جميع المستقيمات الخارجة منها الى المستقيم المعلوم ينتج أنه

اذا كان م حـ أقصر المستقيمات الخارجة من م الى ا ب فان
م حـ هو العمود النازل من م على ا ب

نتيجة ٢ — المائلان م س ، م ص متساويان اذا لاقيا المستقيم المعلوم على بعدين متساويين من موقع العمود

أى أنه لو كان البعد س حـ = البعد ص حـ لكان م س = م ص

لأن المثلثين م س حـ ، م ص حـ تمكن البرهنة على تطابقهما (نظرية ٤)

ومن ذلك ينتج ان م س = م ص

نتيجة ٣ — أى مائلين يخرجان من النقطة المفروضة ويلاقيان المستقيم المعلوم على بعدين مختلفين من موقع العمود يكونان مختلفين وأكبرهما مالاقى المستقيم على بعد أكبر من الموقع المذكور

أى أنه اذا كان حـ ع أكبر من حـ ص فالمائل م ع أكبر من المائل م ص

لأن ∠ م ص حـ حاده

∴ ∠ م ص ع منفرجة

∴ ∠ م ص ع أكبر من ∠ م ع ص

∴ م ع أكبر من م ص

تمـارين على اختلاف الأضلاع والزوايا فى المثلث

١ فى المثلث القائم الزاوية الوتر أكبر الأضلاع

٢ أكبر ضلع فى المثلث يصنع مع كل من ضلعيه الآخرين زاوية حادة

٣ اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى طرفى أحد أضلاعه بمستقيمين كان مجموعهما أصغر من مجموع ضلعى المثلث المحيطين بهما

٤ ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح مدت قاعدته ب ح على استقامتها واخذ على امتدادها نقطة ما مثل ى برهن على أن ا ى أكبر من كل من ساقى المثلث

٥ اذا كان أكبر الأضلاع وأصغرها فى أى شكل رباعى متقابلين كان كل من الزاويتين المجاورتين للضلع الأصغر أكبر من التى تقابلها فى الشكل المذكور

٦ فى أى مثلث مثل ا ب ح اذا لم يكن ا ح أكبر من ا ب فان أى مستقيم واصل من الرأس ا الى أى نقطة فى القاعدة ب ح أصغر من ا ب

٧ اذا كان ب م فى المثلث ا ب ح منصفا ∠ ب ، ح م منصفا ∠ ح وكان ا ب أكبر من ح كان ب م أكبر من ح م

٨ أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين الضلعين الآخرين

٩ مجموع أبعاد أى نقطة عن رؤوس مثلث أكبر من نصف مجموع أضلاعه

١٠ مجموع أضلاع الشكل الرباعى أكبر من مجموع قطريه

١١ ا ب ح مثلث نصفنا زاوية رأسه ا بمستقيم يقابل القاعدة ب ح فى س برهن على أن ا ب أكبر من ب س وأن ا ح أكبر من ح س ومن ذلك استنبط برهانا آخر لنظرية ١١

١٢ اذا فرضت نقطة داخل مثلث وصل منها الى رؤوس زواياه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع أضلاعه

١٣ برهن على أن مجموع قطرى الشكل الرباعى أصغر من مجموع المستقيمات الأربعة الواصلة من أى نقطة مفروضة الى رؤوس الشكل وبين الحالة التى لايصح فيها ذلك

١٤ مجموع أى ضلعين فى المثلث أكبر من ضعف المستقيم المتوسط المنصف للضلع الثالث
[مد المستقيم المتوسط على استقامته وأكمل الرسم كما فى نظرية ٨]

١٥ مجموع المستقيمات المتوسطة فى أى مثلث أصغر من مجموع أضلاعه

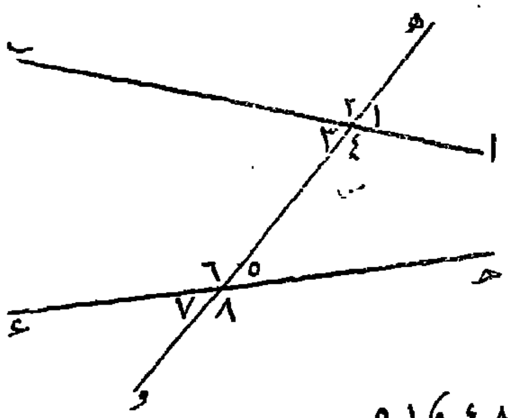
فى المتوازيات

تعريف — المستقيمان المتوازيان هما اللذان يكونان فى مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدا

تنبيـــه — يجب أن تكون المستقيمات المتوازية فى مستو واحد دائمـا فانا اذا رسمنا مستقيمين أحدهما فى مستوى منضدة مثلا والآخر فى مستوى الأرض فان هذين المستقيمين لايلزم أن يلتقيا مهما امتدا مع جواز كونهما غير متوازيين

بديهية — لايمكن أن يكون المستقيمان المتقاطعان موازيين لثالث وبعبارة أخرى لايمكن أن يمد من نقطة مفروضة إلا مستقيم واحد يوازى آخر معلوما وتعرف هذه ببديهية "بلايفير"

تعريف — اذا قطع المستقيم هـ و المستقيمين أ ب 6 حـ ء فانه يحدث من هذا التقاطع ثمـانى زوايا تميز بأسمـاء خاصة



ففى الشكل

الزوايا ١و٢و٧و٨ تسمى خارجة

والزوايا ٣و٤و٥و٦ تسمى داخلة

والزاويتان ٤و٦ تسميان متبادلتين

وكذلك الزاويتان ٣و٥

ويقال للزاويتين ٢و٦ انهما متناظرتان وكذلك ٧و٣ 6 ٨و٤ 6 ١و٥

نظرية ١٣

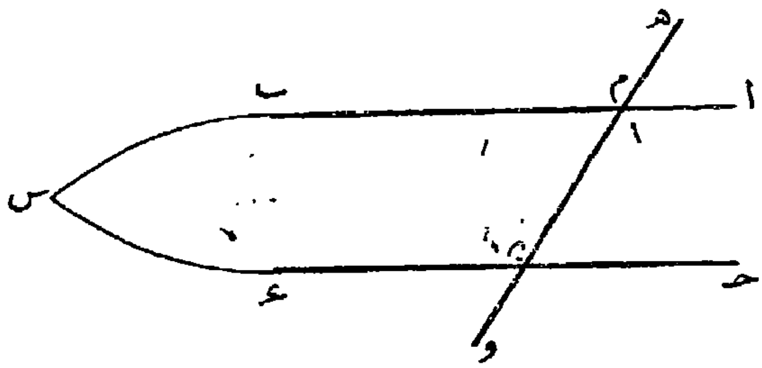
اذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك

(أولا) أن أى زاويتين متبادلتين متساويتان

أو (ثانيا) أن أى زاويتين متناظرتين متساويتان

او (ثالثا) أن مجموع أى زاويتين داخلتين وفى جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين

كان المستقيمان فى أى حال من الأحوال الثلاثة متوازيين



(أولا) اذا فرضنا أن المستقيم هـ و يقطع المستقيمين ا ب ، حـ ء فى م ، ن وكانت الزاويتان المتبادلتان ا م ن ، ء ن م متساويتين

فانه يطلب اثبات أن ا ب يوازى حـ ء

البرهان — ان لم يكن ا ب ، حـ ء متوازيين فانهما يتلاقيان اذا امتدا من جهة ب ، ء أو ا ، حـ

فلو أمكن تلاقيهما فى النقطة س اذا امتدا من جهة ب ، ء مثلا لحدث أن س م ن مثلث مد أحد أضلاعه س م على استقامته الى ا

∴ الزاوية الخارجة ا م ن أكبر من ∠ م ن س

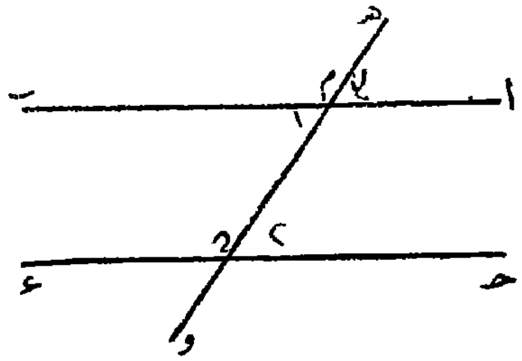
وهذا خلاف الفرض إذ أنهما متساويتان

وقد نشأ الخلاف من فرضنا تلاقى المستقيمين ا ب ، حـ ء فى س

∴ لا يمكن تلاقيهما مهما امتدا فى هذه الجهة

وبالطريقة عينها يثبت أنه لا يمكن تلاقيهما مهما امتدا فى جهة ا ، حـ

∴ المستقيم ا ب يوازى المستقيم حـ ء



(ثانيا) اذا فرضنا ان ∠ هـ م ا = المناظرة لها م ن حـ

فانه يطلب اثبات أن ا ب يوازى حـ ء

البرهان — من حيث ان ∠ هـ م ا = ∠ م ن حـ

ومن حيث ان ∠ هـ م ا = ∠ ب م ن لتقابلهما بالرأس

∴ ∠ م ن حـ = ∠ ب م ن

وهاتان الزاويتان متبادلتان

∴ ا ب يوازى حـ ء

(ثالثا) اذا فرضنا أن مجموع الزاويتين ا م ن ، حـ ن م يساوى قائمتين

فانه يطلب اثبات أن ا ب يوازى حـ ء

البرهان — من حيث ان ∠ ا م ن + ∠ حـ ن م = قائمتين

∴ ∠ ا م ن + ∠ ب م ن = ∠ ا م ن + ∠ حـ ن م

ويطرح ∠ ا م ن من كل من طرفى هذه المتساوية ينتج أن الباقيين متساويان

أى أن ∠ ب م ن = ∠ حـ ن م

ومن حيث ان هاتين الزاويتين متبادلتان

∴ ا ب يوازى حـ ء وهو المطلوب

تعريف — اذا قطع مستقيم مستقيمين أو جملة مستقيمات · فانه يسمى بالقاطع

فمثلا المستقيم هـ م ن و فى الشكل المتقدم قطع كلا من ا ب ، حـ ء فيقال له القاطع

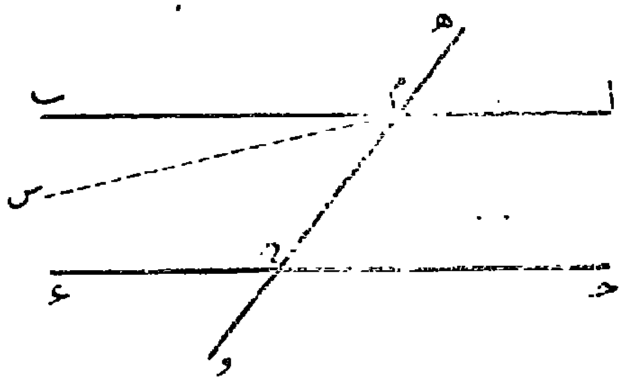
نظرية ١٤

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين يحدث

(أوّلا) ان كل زاويتين متبادلتين متساويتان

(ثانيا) ان كل زاويتين متناظرتين متساويتان

(ثالثا) ان مجموع كل زاويتين داخلتين فى جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين



اذا فرضنا ان ا ب ، حـ ء مستقيمان متوازيان وأن المستقيم هـ م ن و قاطع لهما فانه يطلب اثبات

(أوّلا) ان ∠ ب م ن = المتبادلة معها م ن حـ

(ثانيا) ان ∠ هـ م ا = المناظرة لها م ن حـ

(ثالثا) ان مجموع الزاويتين ا م ن ، م ن حـ = قائمتين

البرهان — (أوّلا) ان لم تكن ∠ ب م ن = ∠ م ن حـ

نفرض أن ∠ س م ن هى التى تساوى ∠ م ن حـ وهاتان الزاويتان متبادلتان

∴ م س يوازى حـ ء (نظرية ١٣)

ولكن ا ب يوازى حـ ء بالفرض

∴ أمكن وجود مستقيمين متقاطعين يوازيان ثالثا وهو حـ ء وهذا محال (بديهية بلايفير)

∴ ∠ ب م ن لايمكن إلا أن تساوى ∠ م ن حـ

أى أن الزاويتين المتبادلتين ب م ن ، م ن حـ متساويتان

(ثانيا) من حيث ان ∠ هـ م ا = ∠ ب م ن للتقابل بالرأس

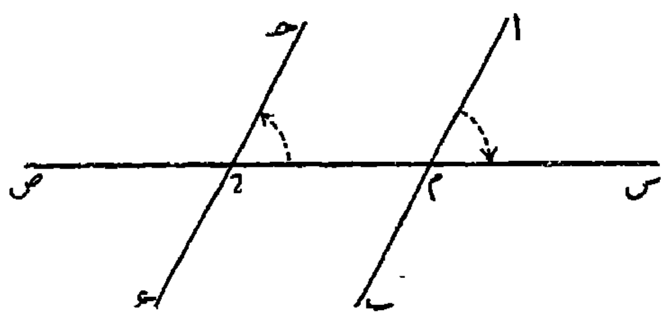
، ∠ ب م ن = ∠ م ن حـ بالتبادل كما تقدّم

∴ ∠ هـ م ا = ∠ م ن حـ وهما متناظرتان

(ثالثا) من حيث ان ∠ هـ م ا = ∠ م ن حـ بالتناظر كما تقدم
فلو أضفنا الى كل من طرفى هذه المتساوية ∠ ا م ن لحدث أن الحاصلين متساويان
أى أن ∠ هـ م ا + ∠ ا م ن = ∠ م ن حـ + ∠ ا م ن
لكن ∠ هـ م ا + ∠ ا م ن = قائمتين
∴ مجموع الزاويتين ا م ن و م ن حـ يساوى قائمتين وهو المطلوب

ايضاح المتوازيات بطريقة الدوران

اتجاه أى مستقيم بالنسبة الى آخر معلوم يعين بالزاوية التى يصنعها معه
فمثلا اتجاه المستقيم ا ب بالنسبة الى المستقيم المعلوم س ص يعين بالزاوية ا م س



فاذا فرض أن ا ب و حـ د مستقيمان متوازيان فان ∠ ا م س = ∠ حـ ن م بالتناظر أى أن ا ب و حـ د يصنعان مع المستقيم المعلوم س ص زاويتين متساويتين

ومن ذلك نستنتج الفكرة التى تؤدى الى المستقيمات المتوازية وهى اتحادها فى الاتجاه مع اختلافها فى الوضع

وذلك انا اذا تصورنا أن ا ب دار حول م بقدر ∠ ا م س فانه ينطبق على س ص ثم اذا تصورنا دورانه ثانيا من هـذا الوضع س ص حول نقطة أخرى مثـل ن فى الجهة المضادة لدورانه الأول حتى صنع الزاوية س ن حـ التى تساوى ∠ س م ا فانه يأخذ الوضع حـ د وهو خلاف الأول ويرجع فيه بهاتين الدورتين المتساويتين المتضادتين الى اتجاهه الأول عينه

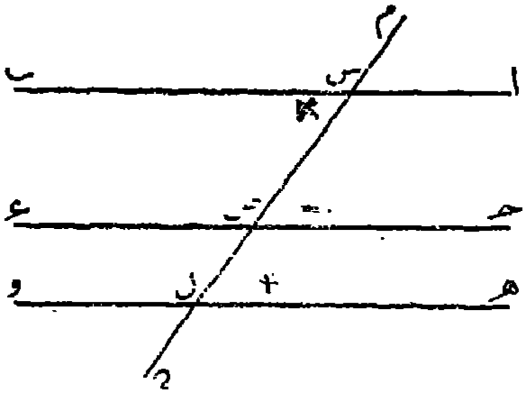
فرض عملى — اذا فرض فى الشكل المتقدم أن ا ب مستقيم ثابت وأن ن نقطة ثابتة وأن حـ د مستقيم آخر يدور حول النقطة ن وأن ص ن م س قاطع مامار بالنقطة المذكورة فانه عنـد دوران حـ د حولها لابد أن يكون له وضـع واحد فيـه تكون ∠ حـ ن س = الزاوية الثابتـة ا م س وفى هذه الحالة يكون حـ د موازيا ا ب

وعلى ذلك يمكن أن نفرض دائما مد مستقيم من نقطة مفروضة يوازى آخر معلوما

تنبيه — اذا تحركت نقطة على المستقيم ا ب من ا الى ب ثم من ب الى ا فانه يقال لهاتين الحركتين انهما فى اتجاهين متضادين

نظرية ١٥

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان



اذا فرضنا أن كلا من ا ب ، حـ د يوازى هـ و

فانه يطلب اثبات أن ا ب يوازى حـ د

لذلك نرسم م ن قاطعا للمستقيمات ا ب فى س ، حـ د فى ص ، هـ و فى ل

البرهان — من حيث ان ا ب ، هـ و متوازيان ، م ن قاطع لهما

∴ ∠ ب س ل = ∠ س ل هـ بالتبادل

ومن حيث ان حـ د ، هـ و متوازيان ، م ن قاطع لهما

∴ ∠ م ص حـ = ∠ ص ل هـ بالتناظر

∴ ∠ ب س ص = ∠ س ص حـ

ومن حيث ان هاتين الزاويتين متبادلتان

∴ ا ب يوازى حـ د وهو المطلوب

ملاحظة — اذا كان المستقيم هـ و واقعا بين المستقيمين ا ب ، حـ د فان النظرية لاتحتاج الى برهان لأنه لايتصور أن يتلاقى مستقيمان لايلاقى كل منهما مستقيما واقعا بينهما

ويمكن ان يبرهن على صحة هذه النظرية ببديهية "بلايفير" التى هى عكسها بأن يقال ان لم يكن ا ب ، حـ د متوازيين تلاقيا ويترتب على ذلك وجود مستقيمين متقاطعين وموازيين لثالث وهذا محال

وعلى ذلك فالمستقيمان ا ب ، حـ د لايلتقيان مهما امتدا أى أنهما متوازيان

تمارين على المتوازيات

١ في شكل النظرية السابقة المطلوب تقدير درج كل من الزوايا د ص ل ، ص ل هـ ، هـ ل ق مع العلم بأن ــ م س ا = ٥٥

٢ المستقيمان العمودان على ثالث متوازيان

٣ اذا قابل مستقيم متوازيين أو أكثر وكان عمودا على أحدها فانه يكون عمودا على الأخرى

٤ الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية تكونان إما متساويتين وإما متكاملتين

٥ المستقيمان ا ب ، حـ د ينصف كل منهما الآخر في م برهن على أنه اذا وصل من ا الى حـ ومن د الى ب فان ا حـ ، د ب يكونان متوازيين

٦ المستقيم الذى يقطع ساقى مثلث متساوى الساقين ويوازى قاعدته يكون مع الساقين زاويتين متساويتين

٧ اذا فرضت نقطة على منصف أى زاوية ورسم منها مواز لأحد ضلعيها كان المثلث الحادث متساوى الساقين

٨ اذا فرضت نقطة مثل س على قاعدة مثلث متساوى الساقين مثل ا ب حـ وأقيم منها عمود يقطع ب ا فى ص وامتداد حـ ا فى ع فانه يطلب البرهنة على أن المثلث ا ص ع متساوى الساقين

٩ اذا كان المنصف لزاوية خارجة لمثلث موازيا للضلع المقابل لمجاورتها فان المثلث يكون متساوى الساقين

١٠ اذا رسم من نقطة على منصف زاوية مستقيمان يوازيان ضلعيها وينتهيان بهما فان هذين المستقيمين يكونان متساويين ويكون الشكل الحادث معينا

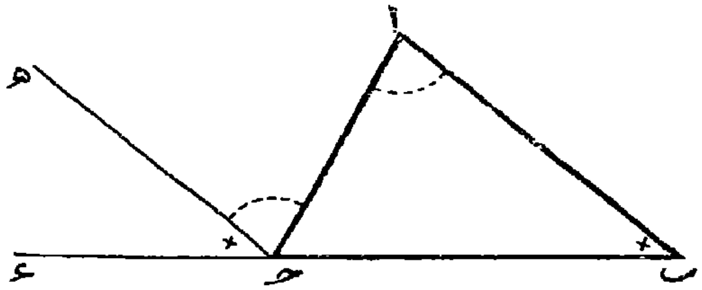
١١ اذا تقاطع المستقيمان حـ د ، ا ب فى نقطة د ونصفت كل من الزاويتين المتجاورتين ا د حـ ، ب د حـ ثم فرضت نقطة ما مثل س على حـ د ورسم منها مستقيم مواز ا ب وقاطع المنصفين فى ص ، ع فانه يراد إثبات أن س ص = س ع

١٢ القضيبان ا س ، ب ص يتحرك أحدهما حول الوتد س والآخر حول الوتد ص ويدور الأول ١٢ دورة فى الدقيقة والثانى ١٠ دورات فى الدقيقة فاذا ابتدآ يدوران من وضعين كانا فيهما متوازيين وفى اتجاه واحد فما هو الزمن الذى يمضى حتى يكونا متوازيين مرة أخرى وذلك

(أولا) فى احالة ختلاف اتجاههما و (ثانيا) فى حالة اتحاده

نظرية ١٦

مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين



اذا فرضنا أن ا ب حـ مثلث

فانه يطلب اثبات أن مجموع الزوايا ا ب حـ ، ب حـ ا ، حـ ا ب = قائمتين

لذلك نمد ب حـ على استقامته الى نقطة ما مثل ء ونفرض أن حـ هـ يوازى ب ا

البرهان — من حيث ان ب ا ، حـ هـ متوازيان ، ا حـ قاطع لهما

∴ ∠ ب ا حـ = ∠ هـ حـ ا بالتبادل

ومن حيث ان ب ا ، حـ هـ متوازيان ، ب ء قاطع لهما

∴ ∠ ا ب حـ = ∠ هـ حـ ء بالتناظر

∴ الزاوية الخارجة الكلية ا حـ ء = مجموع الزاويتين الداخلتين ب ا حـ ، ا ب حـ وباضافة ∠ ا حـ ب الى كل من طرفى هذه المتساوية يحدث أن

∠ ا حـ ء + ∠ ا حـ ب = ∠ ب ا حـ + ∠ ا ب حـ + ∠ ا حـ ب

لكن ∠ ا حـ ء + ∠ ا حـ ب = قائمتين

∴ مجموع الزوايا ا ب حـ ، ب حـ ا ، حـ ا ب = قائمتين وهو المطلوب

ملاحظة — تستنتج من سير البرهان المتقدّم الخاصة الهامّة الآتية وهى أنه

اذا مدّ أحد أضلاع المثلث على استقامته فان الزاوية الخارجة الحادثة تساوى مجموع الزاويتين الداخلتين غير المجاورة

أى أن الزاوية الخارجة ا حـ ء = ∠ حـ ا ب + ∠ ا ب حـ

(استنتاجات من نظرية ١٦)

١ لو فرض أن ا ، ب ، حـ رموز لدرج زوايا المثلث لحدث أن

ا + ب + حـ = ١٨٠°

٢ اذا ساوت زاويتان من مثلث نظيرتيهما من مثلث آخر فان الزاوية الثالثة من المثلث الأوّل لابدّ أن تساوى نظيرتها من المثلث الثانى

٣ فى المثلث القائم الزاوية زاويتاه الحادتان متتامتان

٤ اذا ساوت زاوية فى مثلث مجموع زاويتيه الأخريين كان المثلث قائم الزاوية

٥ مجموع زوايا أى شكل رباعى يساوى أربع قوائم

تمارين على نظرية ١٦

١ كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع تساوى ثلثى قائمة أو ٦٠°

٢ اذا كان المثلث القائم الزاوية متساوى الساقين كانت كل زاوية من زاويتيه المتساويتين ٤٥

٣ المعلوم مثلث احدى زواياه تساوى ٣٦° والأخرى ١٢٣° والمطلوب ايجاد مقدار الزاوية الثالثة وتحقيقه بالقياس

٤ ا ب حـ مثلث فيه ∠ ب = ١١١° ، ∠ حـ = ٤٢° ويراد ايجاد مقدار ∠ ا وتحقيق النـاتج بالقياس

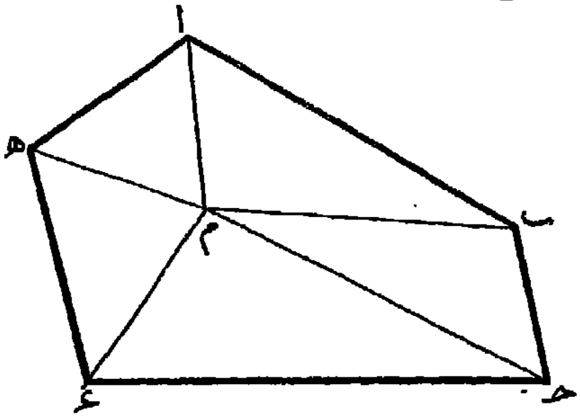
٥ اذا مدّ الضلع ب حـ من المثلث ا ب حـ على استقامته الى ى وكانت الزاوية الخارجة ا حـ ى = ١٣٤° ، ∠ ب ا حـ = ٤٢ فانه يطلب ايجاد مقدار كل من الزاويتين الداخلتين الباقيتين

٦ فى شكل نظرية ١٦ اذا كانت ∠ ا حـ ى = ١١٨ ، ∠ ب = ٥١ فانه يراد ايجاد مقدار كل من الزاويتين ا ، خ مع تحقيق ذلك بالقياس

٧ المطلوب إثبـات أن زوايا المثلث تسـاوى قائمتين بفرض رسم مسـتقيم يمر برأس المثلث ويوازى القـاعدة

٨ اذا تقاطع مستقيمان وأقيم على كل عمود فالزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين تساوى الزاوية الحادّة المحصورة بين العمودين

نتيجة ١ — مجموع الزوايا الداخلة لأى شكل كثير الأضلاع مضافا اليه أربع قوائم يساوى من القوائم بقدر ضعف عدد الأضلاع



اذا فرضنا أن ا ب ح ى هـ شكل كثير الأضلاع وأن عدد أضلاعه ن
فانه يطلب اثبات أن زواياه الداخلة + ٤ قوائم = ٢ ن من الزوايا القوائم
لذلك نفرض نقطة ما مثل م داخل الشكل ونصل منها الى رؤوسه بمستقيمات فينقسم الشكل بهذه المستقيمات الى مثلثات عددها ن
ومن حيث ان مجموع زوايا كل مثلث = قائمتين
فمجموع زوايا كل المثلثات = ٢ ن من القوائم
ولكن زواياها هى زوايا الشكل الداخلة والزوايا المجتمعة فى نقطة م التى تساوى ٤ قوائم
∴ زوايا الشكل الداخلة + ٤ قوائم = ٢ ن من القوائم وهو المطلوب

تعريف — كثير الأضلاع المنتظم أو المضلع المنتظم هو شكل تساوت أضلاعه وزواياه
فاذا رمزنا بالحرف ى لمقدار درج كل زاوية من أى مضلع منتظم عدد أضلاعه ن يحدث أن

ن × ى + ٣٦٠° = ن × ١٨٠

(مسألة)

المطلوب ايجاد مقدار زاوية كثير الأضلاع المنتظم اذا كان

(١) مسدسا (ذا ستة أضلاع)
(٢) مثمنا (ذا ثمانية أضلاع)
(٣) معشرا (ذا عشرة اضلاع)

تمارين على نظرية ١٦

(عددية وتخطيطية)

١ ا ب ح مثلث فيه ∠ ب ضعف ∠ ا ، ∠ ح ثلاثة أمثال ∠ ا ويراد ايجاد مقدار كل زاوية من زوايا هذا المثلث بالدرج

٢ المطلوب إيجاد مقدار كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الساقين بالدرج عند ماتكون

(أولا) كل من زاويتى القاعدة مثلى زاوية الرأس

(ثانيا) كل من زاويتى القاعدة أربعة أمثال زاوية الرأس

٣ المعلوم مثلث مدت قاعدته على استقامتها فى كلتا جهتيها وكانت الزاويتان الخارجتان الحادثتان ٩٤ ، ١٢٦° والمطلوب معرفة زاوية الرأس ثم رسم المثلث وتحقيق ذلك بالقياس

٤ مجموع زاويتى القاعدة فى مثلث ١٦٢° والفرق بينهما ٦٠° ويراد معرفة كل زاوية على حدتها

٥ اذا ساوت زاويتا القاعدة من مثلث ٨٤° ، ٦٢ فانه يراد إيجاد

(أولا) زاوية الرأس (ثانيا) الزاوية المحصورة بين منصفى زاويتى القاعدة ثم رسم المثلث وتحقيق ذلك بالقياس

٦ ا ب حـ مثلث فيه ∠ ب = ٧٤ ، ∠ حـ = ٦٢ مد كل من ا ب ، ا حـ على استقامته ويراد معرفة الزاوية المحصورة بين منصفى الزاويتين الخارجتين الحادثتين مع تحقيق ذلك بالرسم .

٧ شكل رباعى احدى زواياه تساوى $١١٤\frac{١}{٢}$° والثانية ٥٠ والثالثة $٧٥\frac{١}{٢}$ فما مقدار الرابعة

٨ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ∠ ب = ٢ ∠ ا ، ∠ حـ = ٣ ∠ ا ، ∠ ء = ٤ ∠ ا فما مقدار كل زاوية على حدتها

٩ احدى زوايا مخمس غير منتظم تساوى ٤٠° والثانية = ٧٨° والثالثة = ١٢٢ والرابعة = ١٣٥ فما مقدار الخامسة

١٠ اذا كان ن رمزا لعدد أضلاع مضلع منتظم كان مقدار أى زاوية من زواياه يساوى من القوائم بقدر $\frac{٢(ن-٢)}{ن}$ ويراد

(أولا) استخراج هذا القانون من نتيجة ١ المتقدمة

(ثانيا) البرهنة على هذا القانون بدون واسطة النتيجة المذكورة وذلك بأن يوصل من أحد رؤوس الشكل الى رؤوسه الاخرى بمستقيمات (ماعدا الرأسين المجاورين) وبذلك ينقسم الشكل الى مثلثات عددها ن — ٢

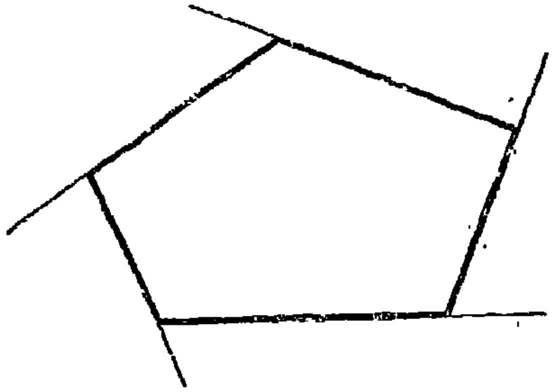
١١ كم أضلاع الشكل المنتظم اذا كانت زاويته (أولا) ١٠٨ (ثانيا) ١٥٦°

١٢ الأشكال المنتظمة التى يمكن وضعها بحيث تشترك جميعها فى رأس ويتحد كل اثنين منها فى ضلع ويتكون من وضعها على هذه الكيفية سطح مستو لاتخرج عن

(أولا) مثلثات متساوية الأضلاع (ثانيا) مربعات (ثالثا) مسدسات منتظمة

نتيجة ٢ — فى أى مضلع محدب اذا مد كل ضلع من أضلاعه على استقامته من جهة واحدة فى ترتيب واحد كان مجموع الزوايا الخارجة الحادثة يساوى أربع قوائم

(المضلع المحدب هو الذى اذا مد أى ضلع من أضلاعه يجعل الشكل كله فى احدى جهتيه)



وللبرهنة على ذلك طريقتان

الأولى — اذا فرض أن عدد أضلاع الشكل = ن

فعدد رؤوسه = ن كذلك

ومعلوم أن فى كل رأس من رؤوس الشكل

الزاوية الداخلة + الزاوية الخارجة = ٢ ق

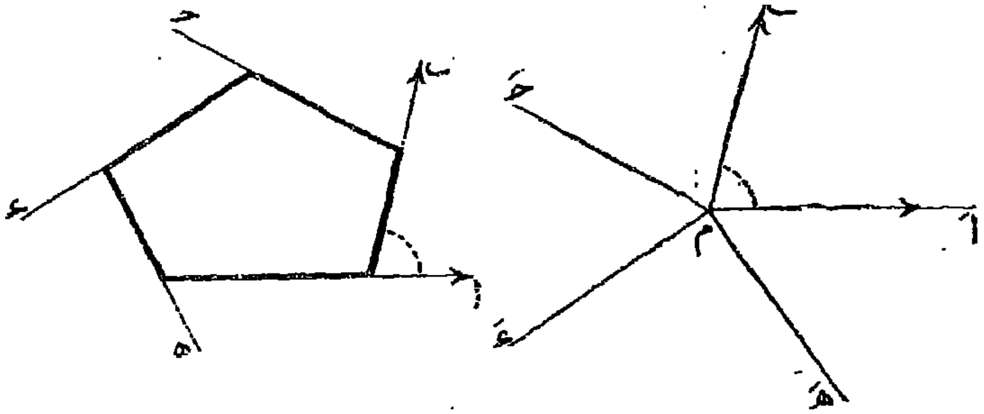
ومن حيث ان عدد رؤوس الشكل = ن

∴ مجموع الزوايا الداخلة + مجموع الزوايا الخارجة = ٢ ن ق

لكن مجموع الزوايا الداخلة + ٤ قوائم = ٢ ن ق (نتيجة ١)

∴ مجموع الزوايا الخارجة = ٤ قوائم وهو المطلوب

الثانيـة —



نفرض نقطة مثل م خارج كثير الأضلاع ونرسم منها المستقيمات

م اَ ، م دَ ، م حـَ ، م ءَ ، م هـَ موازية على الترتيب لأضلاع الشكل المرموز لها بالحروف ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ وفي اتجاهها

فالزاوية المحصورة بين الضلعين ا ، ب = ـد اَ م بَ

وكذلك الزوايا الخارجة الأخرى للشكل = بَ م حـَ ، حـَ م ءَ ، ءَ م هـَ ، هـ م اَ كل لنظيرتها

مجموع الزوايا الخارجة = مجموع الزوايا المجتمعة في م

= ٤ قوائم وهو المطلوب

تمارين

١ اذا مد أحد أضلاع المسدس المنتظم على استقامته فانه يراد اثبات أن الزاوية الخارجة تساوى الزاوية الداخلة للثلث المتساوى الأضلاع

٢ المطلوب معرفة مقدار الزاوية الخارجة بالدرج (أولا) للثمن المنتظم (ثانيا) للعشر المنتظم

٣ كم أضلاع الشكل المنتظم اذا كانت كل زاوية من زواياه الخارجة (أولا) ٣٠ (ثانيا) ٢٤°

٤ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فانه يطلب اثبات أن منصفى الزاويتين الداخلتين اللتين فى جهة واحدة من القاطع متعامدان

٥ اذا مدت قاعدة مثلث على استقامتها فى جهتيها فانه يراد اثبات أن مجموع الزاويتين الخارجتين مطروحا منه زاوية الرأس يساوى قائمتين

٦ ا ب ح مثلث نصفنا زاويتى قاعدته ب ، ح بالمستقيمين ب ى ، ح ى برهن على أن
ـــ ب ى ح = ٩٠ + $\frac{١}{٢}$

٧ ا ب ح مثلث مددنا ضلعيه ا ب ، ا ح على استقامتهما ونصفنا الزاويتين الخارجتين الحادثتين بالمستقيمين ب ى ، ح ى برهن على أن ـــ ب ى ح = ٩٠ − $\frac{١}{٢}$

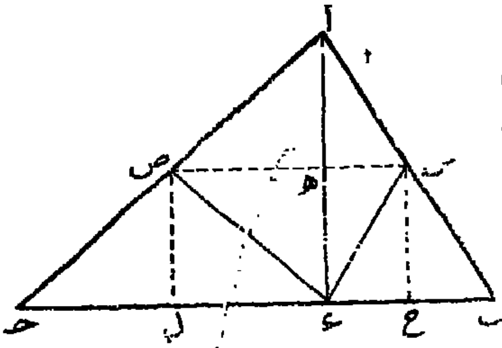
٨ الزاوية المحصورة بين منصفى زاويتين متجاورتين فى أى شكل رباعى تساوى نصف مجموع الزاويتين الأخريين

٩ ا ب ح مثلث متساوى الساقين رأسه ا مد ضلعه ح ا على استقامته الى ى بحيث ان ا ى = ا ح ثم وصل ى ب برهن على أن ـــ ى ب ح قائمة

١٠ المستقيم الواصل من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية الى منتصف الوتر يساوى نصف الوتر

برهان عملى لنظرية ١٦ [ا + ب + ح = ١٨٠]

ليكن ا ب ح هو المثلث المعلوم



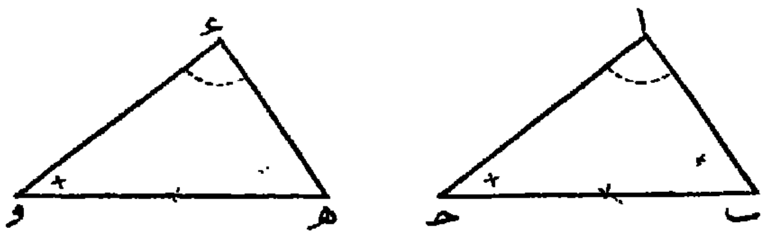
نتزل من ا العمود ا ى على ب ح الذى هو أكبر الأضلاع ثم ننصف هـذا العمود فى النقطة هـ ونقيم منها العمود س هـ ص على ا ى قاطعا الضلع ا ب فى س والضلع ا ح فى ص ثم ننزل من س ، ص العمودين س ع ، ص ل على ب ح

ثم نطوى المثلث ا ب ح عند كل من س ص ، س ع ، ص ل فتأخذ ـــ ا الوضع س ى ص ، ـــ ب الوضع س ى ع ، ـــ ح الوضع ص ى ل

وهذه الزوايا مجتمعة فى ى على ع ل فمجموعها يساوى ٢ ق وهو المطلوب

نظرية ١٧

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمـام الانطباق اذا ساوى فى أحدهما زاويتان وضلع نظائرها فى الثانى



اذا فرضنا أن ا ب حـ ، ء هـ و مثلثان فيهما

ـــ ا = ـــ ء

، ـــ حـ = ـــ و

والضلع ب حـ = الضلع هـ و

فانه يطلب اثبات أن ∆ ا ب حـ ينطبق على ∆ ء هـ و تمـام الانطباق

البرهان — من حيث ان مجموع الزوايا ا ، ب ، حـ = ٢ ق (نظرية ١٦)

= مجموع الزوايا ء ، هـ ، و

ومن حيث ان الزاويتين ا ، حـ تساويان الزاويتين ء ، و

∴ ـــ ب = ـــ هـ

فاذا طبقنا ∆ ا ب حـ على ∆ ء هـ و

على شرط أن يقع الضلع ب حـ على مساويه هـ و

فمن حيث ان ـــ حـ = ـــ و

∴ حـ ا يقع على اتجاه و ء

ومن حيث ان ـــ ب = ـــ هـ

∴ ب ا يقع على اتجاه هـ ء

ويؤخذ من ذلك ان نقطة ا تقع فى آن واحد على احدى نقط و ء وعلى احدى نقط هـ ء وهذا لايتأتى إلا اذا وقعت على نقطة تقاطعهما ء

∴ ينطبق ∆ ا ب حـ على ∆ ء هـ و تمـام الانطباق

ويكون ا ب = ء هـ ، ا حـ = ء و

ويكون ∆ ا ب حـ = ∆ ء هـ و فى المساحة وهو المطلوب

تمارين على تطابق المثلثات

١ برهن على أن العمودين النازلين من نهايتى قاعدة مثلث متساوى الساقين على ساقيه متساويان

٢ كل نقطة من نقط منصف أى زاوية على بعدين متساويين من ضلعيها

٣ نقطة م منتصف المستقيم ا ب برهن على أن العمودين ا س ، ب ص النازلين من ا ، ب على أى مستقيم آخر مار بالنقطة م متساويان

٤ اذا كان منصف زاوية الرأس فى المثلث عمودا على القاعدة كان المثلث متساوى الساقين

٥ اذا كان العمود النازل من رأس المثلث منصفا لقاعدته كان المثلث متساوى الساقين

٦ اذا كان منصف زاوية الرأس فى المثلث منصفا لقاعدته أيضا كان المثلث متساوى الساقين [لذلك نمد المنصف على استقامته وتتم العمل كما فى نظرية ٨]

٧ نقطة تنصيف أى مستقيم طرفاه على مستقيمين متوازيين تكون على بعدين متساويين منهما

٨ نقطة تنصيف أى مستقيم طرفاه على مستقيمين متوازيين تنصف أى مستقيم آخر يمر بها طرفاه على المتوازيين

٩ اذا فرضت نقطة على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين ورسم قاطعان يمران بها فان جزأى المتوازيين المحصورين بين هذين القاطعين متساويان

١٠ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه الضلع ا ب = الضلع ا ء والضلع ب حـ = الضلع ء حـ برهن على أن القطر ا حـ ينصف كلا من الزاويتين ا ، حـ ويكون عمودا على القطر الأخر ب ء

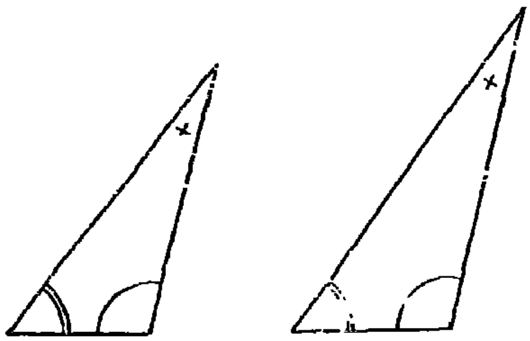
١١ أراد مهندس أن يعين عرض نهر لا يمكنه أن يعبره فوقف فى نقطة مثل ا على الشاطئ ورأى أمامه على الشاطئ الآخر الشجرة ب فتصور مستقيما بين ا ، ب ومشى من ا على خط مستقيم عمودى على ا ب حتى وصل الى نقطة أخرى مثل حـ ثم نصف المسافة بين ا ، حـ فى نقطة م ووضع فيها قامة ثم مشى من حـ على خط مستقيم عمودى على ا حـ الى نقطة ء حيث رأى أنه على امتداد المستقيم الواصل من الشجرة الى القامة ثم قاس المسافة حـ ء برهن على أن هذه المسافة يساوى عرض النهر

فى تطابق المثلثين

نرى مما تقدم فى النظريات ٤ و ٧ و ١٧ أن هناك ثلاثة أحوال لانطباق المثلثين نلخصها فيما يأتى ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوت ثلاثة أجزاء من أحدهما نظائرها من الآخر على الوجه الآتى

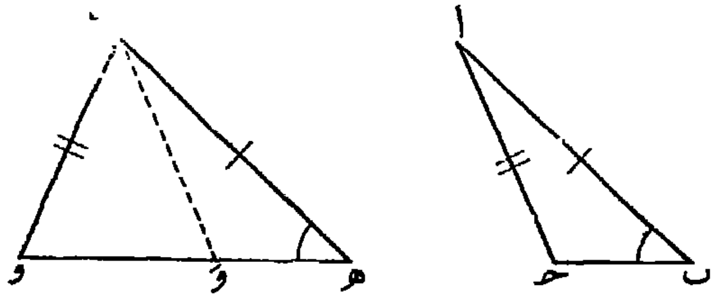
(أولا) ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (نظرية ٤)
(ثانيا) الأضلاع الثلاثة (نظرية ٧)
ثالثا) زاويتان وضلع (نظرية ١٧)

ولا يلزم أن ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما مطلق ثلاثة أجزاء نظائرها من الآخر فمثلا



(أولا) فى الشكل كل زاوية فى أحد المثلثين تساوى نظيرتها فى المثلث الثانى مع أنه لايترتب على ذلك امكان انطباقهما تمام الانطباق كما هو ظاهر

(ثانيا) اذا ساوى ضلعان وزاوية من أحد المثلثين نظائرها من الثانى وكانت الزاويتان المتساويتان مقابلتين لضلعين متساويين كما فى الشكل الآتى فانه لايلزم من ذلك ان ينطبق المثلثان تمام الانطباق



وذلك لأنه اذا فرضنا ان ا ب = د هـ ، ا حـ = د و ، ∠ ب = ∠ هـ

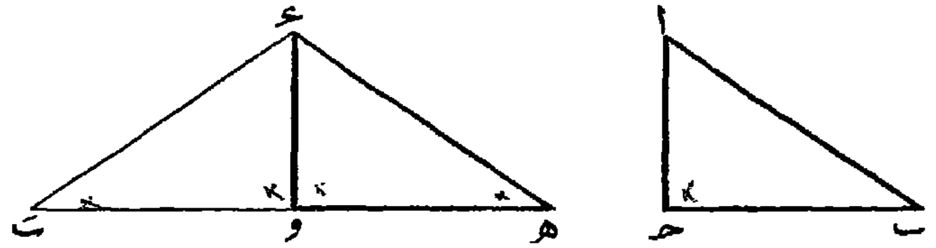
فعند تطبيق △ ا ب حـ على △ د هـ و بحيث ان ا ب ينطبق على مساويه د هـ ، ∠ ب على مساويتها هـ نرى أن ا حـ إما أن ينطبق على د و وإما أن يأخذ الوضع د وَ

تنبيه — من هذه الفروض يمكن اثبات أن الزاويتين المقابلتين للضلعين المتساويين ا ب ، د هـ اما أن تكونا متساويتين كالزاويتين ا حـ ب ، د وَ هـ فينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق وإما أن تكونا متكاملتين كالزاويتين ا حـ ب ، د و هـ وتسمى هذه الحالة بالحالة المبهمة التى إما ان يتطابق المثلثان فيها أولا (راجع عملية ٩ صفحة ٨٧)

ولا يأتى الابهام اذا كان كل من الزاويتين المفروض تساويهما قائمة كما يتضح من النظرية الآتية

نظرية ١٨

ينطبق المثلثان القائما الزاوية كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما وتروضلع نظيريهما من الثانى



اذا فرضنا أن المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و قائما الزاوية الأول فى حـ والثانى فى و

وكان الوتر ا ب = الوتر ء هـ

والضلع ا حـ = الضلع ء و

فانه يطلب اثبات ان ∆ ا ب حـ ينطبق على ∆ ء هـ و تمام الانطباق

البرهان — نضع المثلث ا ب حـ بجانب المثلث ء هـ و بحيث يقع الضلع ا حـ على مساوية ء و ويأخذ المثلث ا ب حـ الوضع ء بَ و

فمن حيث ان كلا من الزاويتين ء و هـ ، ء و بَ قائمة

∴ المستقيم بَ و يكون على استقامة هـ و

وفى المثلث هـ ء بَ من حيث ان ء هـ = ء بَ (لأن كلا = ا ب)

∴ ∠ ء بَ هـ = ∠ ء هـ بَ (نظرية ٥)

وعلى ذلك ففى ∆ ء و هـ ، ∆ ء و بَ

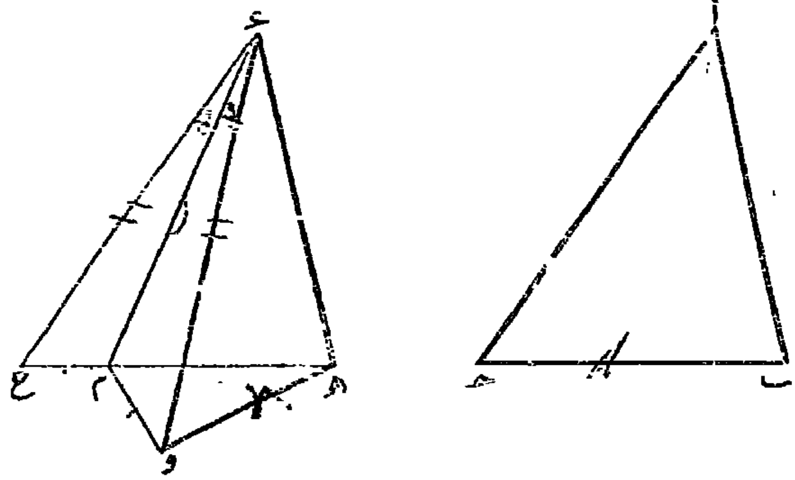
من حيث ان { ∠ ء و هـ = ∠ ء و بَ بالقيام ، ∠ ء هـ و = ∠ ء بَ و مما تقدم ، والضلع ء و مشترك }

∴ ∆ ء و هـ ينطبق على ∆ ء و بَ تمام الانطباق (نظرية ١٧)

أى أن ∆ ا ب حـ ينطبق تمام الانطباق على ∆ ء هـ و وهو المطلوب

نظرية ١٩

اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعى الأول اكبر من نظيرتها المحصورة بين ضلعى الثانى كان الضلع الثالث فى المثلث الأول أكبر من نظيره فى المثلث الثانى



اذا فرضنا فى المثلثين ا ب حـ ، د هـ و

ان ا ب = د هـ

، ا حـ = د و

، ∠ ب ا حـ أكبر من ∠ هـ د و

فانه يطلب اثبات أن ب حـ أكبر من هـ و

البرهان — نطبق △ ا ب حـ على △ د هـ و على شرط أن تقع نقطة ا على نقطة د ويقع ا ب على مساويه د هـ

ثم نفرض أن الضلع ا حـ اخذ الوضع د ع وأن الضلع ب حـ أخذ الوضع هـ ع فاذا أخذ الضلع هـ ع اتجاه الضلع هـ و ومر بالنقطة و وكان أكبر من هـ و

أى أن ب حـ أكبر من هـ و

وان لم يأخذ هـ ع هذا الاتجاه فانه لايمر بنقطة و

وعلى ذلك نفرض أن د م منصف ∠ و د ع وأنه يقابل هـ ع فى م

نصل م و

فى △ و د م ، △ ع د م

من حيث ان { و د = ع د ، م د مشترك ، ∠ و د م = ∠ ع د م }

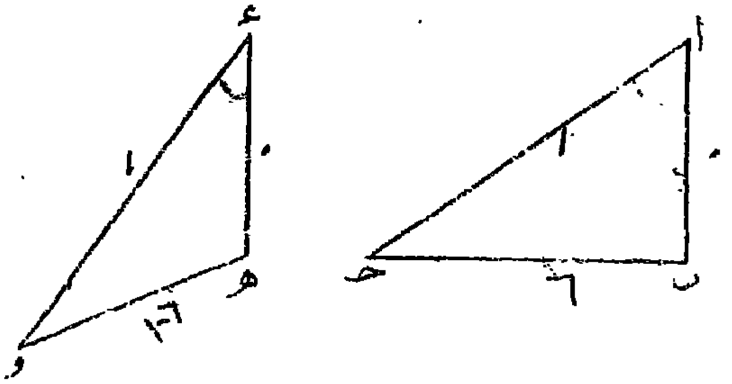
∴ و م = ع م (نظرية ٤)

وفى ∆ هـ م و مجموع الضلعين هـ م ، م و أكبر من الضلع الثالث هـ و وبعبارة أخرى

هـ م + م ع أكبر من هـ و

∴ هـ ع الذى هو (ب حـ) أكبر من هـ و وهو المطلوب

وبالعكس : اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكان الضلع الثالث فى المثلث الأول أكبر من نظيره فى الثانى كانت الزاوية المحصورة بين الضلعين فى المثلث الأول أكبر من نظيرتها فى الثانى



اذا فرضنا فى المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و أن

ا ب = ء هـ

، ا حـ = ء و

، ب حـ أكبر من هـ و

فانه يطلب اثبات أن ∠ ب ا حـ اكبر من ∠ هـ ء و

البرهان — ان لم تكن ∠ ب ا حـ أكبر من ∠ هـ ء و

فاما ان تساويها وإما أن تكون أصغر منها

فان كانت ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ء و

كان ب حـ = هـ و (نظرية ٤)

وهذا خلاف الفرض

وان كانت ∠ ب ا حـ أصغر من ∠ هـ ء و

كان ب حـ أصغر من هـ و (نظرية ١٩)

وهذا خلاف الفرض أيضا

أى أن ∠ ب ا حـ لايمكن أن تساوى ∠ هـ ء و كما أنها لايمكن أن تكون أصغر منها

فلابد أن تكون ∠ ب ا حـ أكبر من ∠ هـ ء و وهو المطلوب

مراجعة ماتقدم فى المثلثات

١ اذكر خواص المثلث من حيث (أولا) مجموع زواياه الداخلة (ثانيا) مجموع زواياه الخارجة واذكر خاصة فى كثير الأضلاع الذى عدد أضـلاعه ن توافق التى ذكرتها فى (أولا) وبين مع أى الأشكال يشترك المثلث فى الخاصة التى ذكرتها فى (ثانيا)

٢ اذكر أنواع المثلثات بالنسبة الى زواياها مع ذكر أى نظرية أو نتيجة يتضمنها ذلك التقسيم

٣ اذكر نظريتين يكون الفرض فيهما متعلقا بأضلاع المثلث والناتج الذى يستنبط من هذا الفرض متعلقـا بزواياه

ا ب ح مثلث فيه اَ = ٣,٦ من السنتيمترات ، بَ = ٢,٨ من السنتيمترات ، حَ = ٣,٦ من السـنتيمترات والمطلوب بيان زواياه مرتبة حسب مقدار كل منها (قبل قياسها) واثبات أن هذا المثلث حاد الزوايا

٤ اذكر نظريتين يكون الفرض فيهـما متعلقا بزوايا المثلث والناتج الذى يستنبط من هذا الفرض متعلقا بالأضلاع

فى المثلث ا ب ح

(أولا) ∠ ا = ٤٨° ، ∠ ب = ٥١ مامقدار الزاوية الثالثة وما هو أكبر الأضلاع

(ثانيا) ∠ ا = ∠ ب = ٦٢½° مامقدار الزاوية الثالثة . اذكر الأضلاع مرتبة على حسب طول كل منها

٥ هل الشروط فى كل من الأقسام الستة الآتية كافية لانطباق المثلثين ا ب ح ، ء هـ و كل على الآخر تمـام الانطباق . بين فى أى قسم من الاقسام تكون الحالة المبهمة للثلثين ثم ارسم المثلث ا ب ح بالشروط المذكورة فى كل قسم

(أولا)	∠ ا = ∠ ء = ٧١° ∠ ب = ∠ هـ = ٤٦° اَ = ءَ = ٣,٧ من السنتيمترات	(رابعا)	اَ = ءَ = ٣ سنتيمترات بَ = هـَ = ٢,٥ من السنتيمترات حَ = وَ = ٤,٥ « «
(ثانيا)	اَ = ءَ = ٤,٢ من السنتيمترات بَ = هـ = ٢,٤ « « ∠ ح = ∠ و = ٨١°	(خامسا)	∠ ب = ∠ هـ = ٥٣° بَ = هـَ = ٤,٣ من السنتيمترات حَ = وَ = ٥ سنتيمترات
(ثالثا)	∠ ا = ∠ ء = ٣٦ ∠ ب = ∠ هـ = ١٢١° ∠ ح = ∠ و = ٢٣°	(سادسا)	∠ ح = ∠ و = ٩٠ حَ = وَ = ٥ سنتيمترات اَ = ءَ = ٣ «

٦ اذكر عبارة تتضمن خلاصة ماتقدم من النتائج فى المسألة السابقة بحيث يتبين منها

(اوّلا) وجوب انطباق المثلثين كل على الآخر تمـام الانطباق

(ثانيا) جواز انطباقهما

٧ اشرح العبارة الآتيـة شرحا وافيا : اذا ساوت ثلاث زوايا من مثلث نظيراتها من مثلث آخر لايلزم أن ينطبق المثلثان أحدهما على الآخر تمـام الانطباق لأن الفروض الثلاثة غير مطلقة

تمارين متنوعة

٨ من نقطة خارجة عن مستقيم معلوم اذا مدّ اليه عمود وعدّة موائل كان
(أولا) العمود أقصر المستقيمات الممكن مدها
(ثانيا) المائلان اللذان يصنعان زاويتين متساويتين مع العمود متساويين
(ثالثا) أصغر المائلين ما كانت زاويته التي يصنعها مع العمود أصغر من زاوية المائل الآخر

٩ اذا ساوى من مثلث ضلعان والزاوية المقابلة لأحدهما نظيراتها من مثلث آخر فالزاوية المقابلة للضلع الآخر من المثلث الأول إما مساوية أو مكملة لنظيرتها من المثلث الثانى وفى الحالة الأولى ينطبق المثلثان تمام الانطباق

١٠ ا ب عمود على حـ ء والمطلوب مد عدة موائل من نقطة ا تصنع مع العمود المذكور الزوايا ١٥°, ٣٠°, ٤٥°, ٦٠°, ٧٥° ووضع جدول يبين مقدار كل من أطوال هذه الموائل بواسطة قياسها على فرض أن طول العمود ٤ سنتيمترات

١١ ا ب حـ مثلث طول ضلعه ا ب = ٤ سنتيمترات والضلع ا حـ = ٣ سنتيمترات فاذا كان ا ب ثابت الوضع وتصورنا دوران ا حـ حول نقطة ا بحيث يكون طوله دائما ثابتا ومساويا ٣ سنتيمترات فما هى التغيرات فى طول ب حـ أثناء دوران ا حـ كلما زادت ∠ ا من الصفر الى ١٨٠° يكتفى فى الاجابة أن يقاس ب حـ كلما زادت ∠ ا مقدار ٣٠° وتوضع المقاييس المختلفة على هيئة جدول

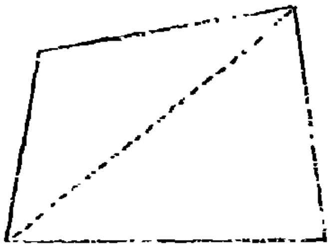
١٢ ا ب سارية رأسية موضعها نقطة ب رسم منها مستقيم أفقى مار بنقطتى حـ ، ء المتباعدتين بقدر ١٠ أمتار وكانت ∠ ب حـ ا = ٦٥° ، ∠ ب ء ا = ٤٠° والمطلوب وضع رسم يبين فيه الشكل المذكور (بمقياس سنتيمتر واحد لكل ١/٢ ٢ من الأمتار) واستخراج طول السارية على وجه التقريب بواسطة قياسه

١٣ ا ب منارة رأسها ا شاهد منه رجل السفينتين حـ ، ء راسيتين على خط مستقيم جنوبى المنارة فاذا علم أن ا ب = ٤٠ مترا وأن ∠ ا حـ ب = ٥٧ ، ∠ ا ء ب = ٣٣ فانه يطلب وضع رسم بمقياس سنتيمتر لكل ١٠ أمتار يمكن به استخراج البعد بين حـ ، ء مقربا الى اقرب متر

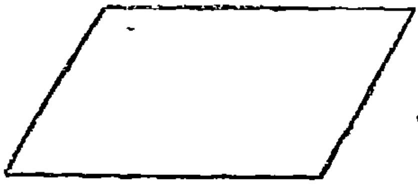
١٤ شاهد رجل من منارة السفينتين ا ، ب متباعدتين بقدر ٦٠٠ متر الأولى ا فى الجهة الجنوبية الغربية والثانية ب تبعد عن جهة الجنوب بقدر ١٥ نحو الشرق وفى اللحظة عينها شاهد انسان فى السفينة ا أن السفينة ب واقعة فى الجهة الجنوبية الشرقية والمطلوب وضع رسم ذلك (بمقياس سنتيمتر لكل ١٠٠ متر) واستخراج بعد المنارة عن كل سفينة بواسطة قياسه

في الأشكال المتوازية الأضلاع

تعاريف



١ الشكل الرباعي شكل مستو محدود بأربعة مستقيمات والمستقيم الواصل بين رأسي زاويتين متقابلتين منه يسمى قطرا له

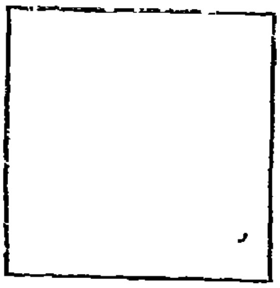


٢ متوازي الأضلاع هو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة متوازية [وسيأتي البرهان على أن الاضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متساوية وكذلك الزوايا المتقابلة]



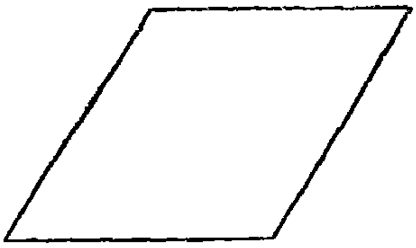
٣ المستطيل هو شكل متوازي الأضلاع احدى زواياه قائمة

[وسيأتي البرهان على أن جميع زوايا المستطيل قوائم صفحة ٦٤]

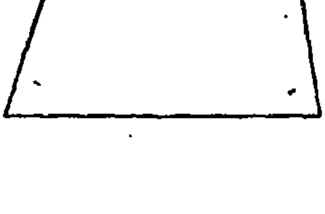


٤ المربع هو مستطيل ضلعاه المتجاوران متساويان

[وسيأتي البرهان على أن جميع أضلاعه متساوية وزواياه قوائم صفحة ٦٤]



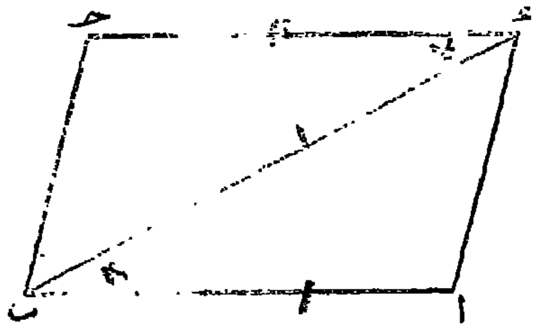
٥ المعين هو شكل رباعي أضلاعه متساوية وزواياه غير قوائم



٦ شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيين

نظرية ٢٠

اذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى يتساوى ويتوازى الضلعان الآخران



اذا فرضنا أن ا ب حـ ء شكل رباعى وان ا ب ، حـ ء ضلعيه المتقابلين متساويان ومتوازيان فانه يطلب اثبات أن الضلعين الآخرين ا ء ، حـ ب المتقابلين متساويان ومتوازيان كذلك

لذلك نصل ب ء

البرهان — من حيث ان ا ب يوازى حـ ء ، ء ب قاطع لهما

∴ ∠ ا ب ء = ∠ حـ ء ب بالتبادل

ففى المثلثين ا ب ء ، حـ ء ب

من حيث ان { ا ب = حـ ء ، ب ء مشترك ، ∠ ا ب ء = ∠ حـ ء ب مما تقدّم }

∴ ينطبق △ ا ب ء على △ حـ ء ب تمام الانطباق

ويكون (أولا) ا ء = حـ ب

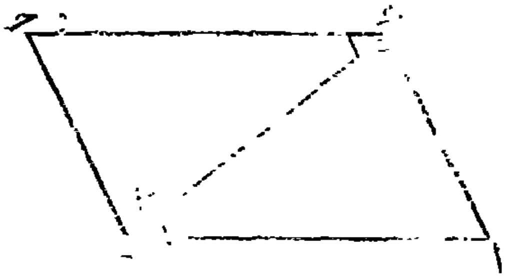
(ثانيا) ∠ ا ء ب = ∠ حـ ب ء ومن حيث ان هاتين الزاويتين متبادلتان

∴ ا ء يوازى حـ ب

أى أن ا ء ، حـ ب متساويان ومتوازيان وهو المطلوب

نظرية ٢١

فى متوازى الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان وكل زاويتين متقابلتين متساويتان والقطر يقسم الشكل الى قسمين متساويين



اذا فرضنا أن ا ب ح ى شكل متوازى الأضلاع قطره ب ى

فانه يطلب اثبات

(أولا) أن ا ب = ح ى ، ا ى = ح ب

(ثانيا) أن ∠ ب ا ى = ∠ ى ح ب

(ثالثا) أن ∠ ا ب ح = ∠ ح ى ا

(رابعا) أن Δ ا ب ى = Δ ح ى ب فى المساحة

البرهان — من حيث ان ا ب ، ح ى متوازيان ، ى ب قاطع لهما

∴ ∠ ا ب ى = ∠ ح ى ب بالتبادل

ومن حيث ان ا ى ، ح ب متوازيان ، ى ب قاطع لهما

∴ ∠ ا ى ب = ∠ ح ب ى بالتبادل

وعلى ذلك ففى المثلثين ا ب ى ، ح ى ب

من حيث ان { ∠ ا ب ى = ∠ ح ى ب ، ∠ ا ى ب = ∠ ح ب ى والضلع ى ب مشترك }

∴ Δ ا ب ى ينطبق على Δ ح ى ب تماما (نظرية ١٧)

اذن ا ب = ح ى ، ا ى = ح ب ... ... (أولا)

، ∠ ب ا ى = ∠ ى ح ب ... ... (ثانيا)

، Δ ا ب ى = Δ ح ى ب فى المساحة... ... ... (رابعا)

ومن حيث ان ∠ ا ب ى = ∠ ح ى ب

، ∠ ح ب ى = ∠ ا ى ب

∴ الزاوية الكلية ا ب ح = الزاوية الكلية ح ى ا ... ... (ثالثا)

نتيجة ١ — اذا كانت احدى زوايا متوازى الأضلاع قائمة فكل زاوية أخرى فيه قائمة ايضا
وبعبارة أخرى زوايا المستطيل كلها قوائم

لأن مجموع كل زاويتين متجاورتين = ٢ ق (نظرية ١٤)

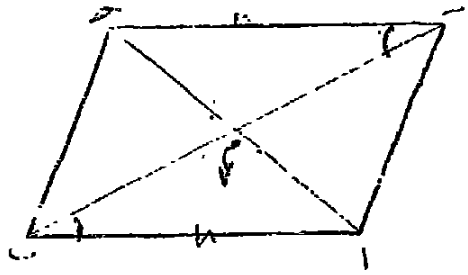
فاذا كانت إحداهما قائمة وجب أن تكون الأخرى كذلك

ومن حيث ان كل زاويتين متقابلتين فى متوازى الأضلاع متساويتان

∴ جميع الزوايا قوائم

نتيجة ٢ — أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم

نتيجة ٣ — قطرا متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر



اذا فرضنا أن القطرين ب ى ، ا حـ يتقاطعان فى م

فانه يطلب إثبات أن ب م = م ى ، ا م = م حـ

البرهان — فى △ ا م ب ، △ حـ م ى

من حيث ان:
- ∠ م ب ا = ∠ م ى حـ — بالتبادل
- ، ∠ ا م ب = ∠ حـ م ى — بالتقابل بالراس
- والضلع ا ب = الضلع حـ ى

∴ م ب = م ى ، ا م = م حـ (نظرية ١٧)

تمارين

١ يكون الشكل الرباعى متوازى الأضلاع

(أولا) اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متساويان

(ثانيا) اذا كان كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان

(ثالثا) اذا نصف قطراه كل الآخر

٢ قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر ويكونان متعامدين

٣ اذا تساوى قطرا متوازى الأضلاع كانت زواياه قوائم

٤ قطرا متوازى الأضلاع غير متساويين مالم يكن مستطيلا أو مربعا

تمارين على الخطوط المتوازية والأشكال المتوازية الأضلاع

التماثل والتطبيق

١ برهن على أنه اذا طوينا المعين عند أحد قطريه ينطبق المثلثان اللذان على جانبي هذ القطر كل على الآخر تمام الانطباق أى أن قطر المعين يقسمه الى مثلثين متماثلين فى الوضع

٢ برهن على أن كلا من قطرى المربع محور للتماثل وأوجد مستقيمين آخرين يقسم كل منهما المربع الى قسمين متماثلين

٣ كل من قطرى المستطيل يقسمه الى مثلثين متطابقين فهل يكون على هذا قطر المستطيل محورا للتماثل فيه وما هما المستقيمان اللذان يقسم كل منهما المستطيل الى جزأين متماثلين

٤ بين ما اذا كان لمتوازى الأضلاع محور تماثل واذكر السبب

٥ ا ب ح ى شكل رباعى فيه ا ب = ا ى ، ح ب = ح ى والمطلوب معرفة أى القطرين يصح أن يكون محورا للتماثل مع العلم بأن الأضلاع ليست جميعها متساوية

٦ المطلوب اثبات مايأتى بطريقة التطبيق

(أولا) يتطابق متوازيا الأضلاع اذا ساوت زاوية وضلعان متجاوران من أحدهما نظائرها من الثانى

(ثانيا) يتطابق المستطيلان اذا ساوى ضلعان متجاوران من أحدهما نظيريهما من الثانى

٧ ينطبق الشكلان الرباعيان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوت الأضلاع الأربعة ومطلق زاوية من أحدهما نظائرها من الثانى

(مسائل نظرية متنوعة)

٨ منتصف قطر متوازى الأضلاع ينصف أى مستقيم يمر به وينتهى بضلعين متقابلين

٩ العمودان النازلان من رأسين متقابلين فى متوازى الأضلاع على القطر الواصل بين الرأسين الآخرين متساويان

١٠ اذا كانت النقطة س منتصف الضلع ا ب فى متوازى الأضلاع ا ب ح ى والنقطة ص منتصف الضلع المقابل ح ى كان الشكل ى س ب ص متوازى الأضلاع

١١ ا ب ح ، ى هـ و مثلثان فيهما ا ب يساوى ى هـ ويوازيه ، ب ح يساوى هـ و ويوازيه والمطلوب اثبات أن ا ح يساوى ى و ويوازيه

١٢ ا ب ح ى شكل رباعى فيه ا ب يوازى ى ح ، ا ى يساوى ب ح ولكنه لايوازيه والمطلوب إثبات

(أولا) ان ∠ ا + ∠ حـ = ١٨٠° = ∠ ب + ∠ ء

(ثانيا) ان القطر ا حـ = القطر ب ء

(ثالثا) ان المستقيم الواصل من منتصف ا ب الى منتصف ء حـ يقسم الشكل الى جزأين متماثلين

١٣ ا ب ، حـ ء قضيبان متساويان يدوران بسرعة واحدة الأول حول ا والثانى حول حـ فى الاتجاه الذى يدور فيه عقرب الساعة فاذا ابتدآ فى دورانهما من وضعين متوازيين فى اتجاهين متضادين فانه يطلب اثبات

(أولا) ان هذين القضيبين يكونان دائما متوازيين أثناء دورانهما

(ثانيا) ان المستقيم الواصل بين الطرفين ب ، ء يمر دائما بنقطة معلومة ثابتة

(مسائل عددية وتخطيطية متنوعة)

١٤ ا ب حـ مثلث والمطلوب معرفة مقدار كل من زواياه مع العلم بأن ∠ ا الداخلة = $\frac{٣}{٧}$ ∠ ا الخارجة وأن ثلاثة أمثال ∠ ب = أربعة أمثال ∠ حـ

١٥ سفينة سائرة نحو الجهة الشرقية اضطرت الى السير حول جزيرة فغيرت اتجاهها (أولا) بقدر ٦٣° ثم ٧٨° ثم ١١٩° ثم ٦٤° والمطلوب معرفة مقدار التغيير الذى يجب أن تحدثه السفينة فى اتجاهها حتى تسير فى اتجاهها الأول أى نحو الجهة الشرقية

١٦ اذا كان مجموع الزوايا الداخلة لأى شكل كثير الأضلاع يساوى مجموع زواياه الخارجة فانه يطلب عدد أضلاعه مع اقامة البرهان على صحة الجواب

١٧ المطلوب رسم الشكل الخماسى ا ب حـ ء هـ بحيث تكون فيه ∠ ب = ١١٠° ، ∠ حـ = ١١٥ ، ∠ ء = ٩٣ ، ∠ هـ = ١٥٢° وذلك باستعمال المنقلة

ثم تحقيق ما اذا كان الضلع ا هـ يوازى ب حـ بواسطة المسطرة والبرجل واثبات ذلك نظريا

١٨ ا ، ب نقطتان ثابتتان . مددنا من ا مستقيما غير محدود مثل ا م مارا بالنقطة ب ومن ب مستقيما آخر مثل ب ن غير محدود كذلك مارا بنقطة ا فاذا تصورنا أن المستقيمين ا م ، ب ن ابتدآ أن يدورا فى آن واحد الأول حول نقطة ا فى اتجاه عقرب الساعة على شرط أن يدور فى الثانية الواحدة فى زاوية مقدارها $٧\frac{١}{٢}$° والثانى حول ب فى اتجاه مخالف لسير عقرب الساعة على شرط أن يدور فى الثانية الواحدة فى زاوية مقدارها $٣\frac{٣}{٤}$ فانه يراد

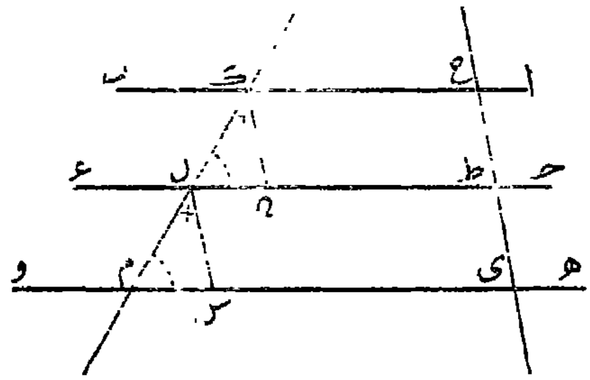
(أولا) معرفة الزمن الذى يمضى حتى يكون ا م ، ب ن متوازيين

(ثانيا) ايجاد مقدار الزاوية بين ا م ، ب ن بالرسم والحساب بعد ١٢ ثانية من ابتداء الدوران

(ثالثا) مقدار ماتنقصه هذه الزاوية بعد ذلك فى الثانية الواحدة

نظرية ٢٢

اذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المتوازيات متساوية فالأجزاء المحصورة بينها لأى قاطع آخر متساوية كذلك



اذا فرضنا أن ا ب ، ح ء ، هـ و مستقيمات متوازية وان ع ط ى قاطع لها وفيه الجزء ع ط = الجزء ط ى وأن ك ل م قاطع آخر

فانه يطلب اثبات أن الجزء ك ل = الجزء ل م

لذلك نرسم من ك المستقيم ك ن موازيا ع ى ومن ل المستقيم ل س موازيا ع ى ايضا

البرهان — من حيث أن ح ء ، هـ و متوازيان ، ك م قاطع لهما

∴ ∠ ك ل ن = ∠ ل م س بالتناظر

ومن حيث ان ك ن يوازى ل س لأن كلا يوازى ع ى ، ك م قاطع لهما

∴ ∠ ن ك ل = ∠ س ل م بالتناظر

لكن كلا من الشكلين ع ن ، ط س متوازى الأضلاع

∴ ك ن = الضلع المقابل له ع ط ، ل س = الضلع المقابل له ط ى

ومن حيث ان ع ط = ط ى بالفرض

∴ ك ن = ل س

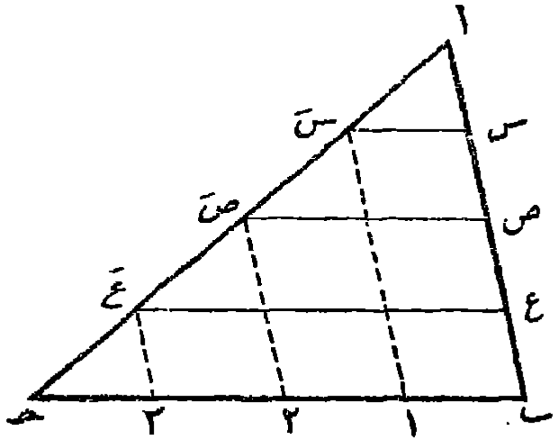
وعلى ذلك ففى المثلثين ك ل ن ، ل م س

من حيث ان { ∠ ك ل ن = ∠ ل م س ، ∠ ن ك ل = ∠ س ل م ، ك ن = ل س }

∴ ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق (نظرية ١٧)

∴ ك ل = ل م وهو المطلوب

نتيجة — اذا قسمنا أحد أضلاع المثلث ا ب ح وليكن ا ب الى أقسام متساوية بالنقط س ، ص ، ع ثم مددنا من هذه النقط المستقيمات س سَ ، ص صَ ، ع عَ موازية للقاعدة ب ح فان هذه المتوازيات تقسم الضلع الثانى ا ح الى أقسام متساوية



ورنا يمكن تعيين طول كل من هذه المتوازيات بالنسبة الى طول القاعدة ب ح

وذلك لأننا اذا رسمنا من س ، صَ ، عَ المستقيمات سَ ١ ، صَ ٢ ، عَ ٣ موازية ا ب

فان هذه المستقيمات على حسب نظرية ٢٢ تقسم ب ح الى أربعة أقسام متساوية ويكون س سَ مساويا أحد هذه الأقسام ، ص صَ اثنين منها ، ع عَ يساوى ثلاثة

وبعبارة أخرى يكون

س سَ $= \frac{1}{4}$ ب ح ، ص صَ $= \frac{2}{4}$ ب ح ، ع عَ $= \frac{3}{4}$ ب ح

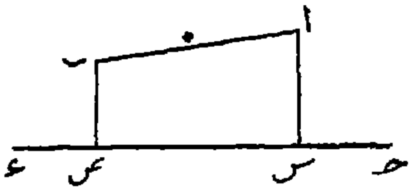
ويقال على وجه الاجمال اذا اقسم أحد أضلاع المثلث الى ن من الأقسام المتساوية ومد منها موازيات لقاعدته تقابل الضلع الثانى فان

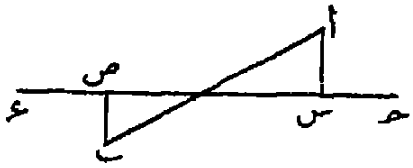
س سَ $= \frac{1}{ن}$ ب ح ، ص صَ $= \frac{2}{ن}$ ب ح ، ع عَ $= \frac{3}{ن}$ ب ح وهكذا

تنبيه — ينبغى أن تدرس الآن عملية ٧ صفحة ٨٣

(تعريف)

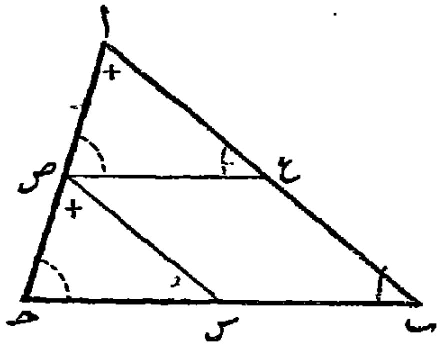
اذا أنزلنا من نهايتى مستقيم معلوم مثل ا ب عمودين مثل ا س ، ب ص على مستقيم آخر مثل ح ء غير محدود فانه يقال للمستقيم س ص المحصور بين موقعى العمودين المذكورين انه مسقط ا ب على ح ء





تمارين على المستقيمات المتوازية والأشكال المتوازية الأضلاع

اذا رسمنا من منتصف أحد أضلاع مثلث مستقيما يوازى قاعدته فانه يمر بمنتصف الضلع الثانى وهذه حالة خاصة للنظرية ٢٢

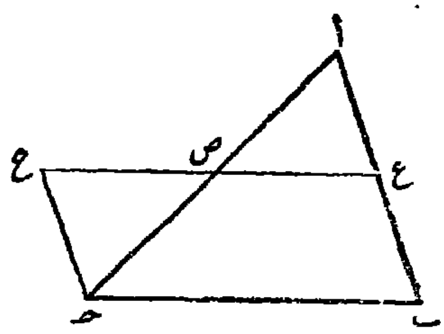


[ا ب حـ مثلث ونقطة ع منتصف ا ب ، ع ص يوازى ب حـ

ويطلب اثبات أن ا ص = ص حـ

لذلك نرسم ص س يوازى ا ب ونثبت أن ∆ ع ا ص ينطبق على ∆ س ص حـ تمام الانطباق]

٢ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين فى المثلث يوازى الضلع الثالث



[ا ب حـ مثلث والنقطة ع منتصف ا ب ، ص منتصف ا حـ

ويطلب اثبات أن ع ص يوازى ب حـ

لذلك نمد ع ص على استقامته الى ع ونأخذ البعد ص ع = ع ص ونصل ع حـ ثم نبرهن على أن ∆ ا ع ص ينطبق على ∆ حـ ع ص تمام الانطباق

ومن ذلك يتضح الباقى من البرهان]

٣ المستقيم الواصل من منتصف ضلع مثلث الى منتصف الآخر يساوى نصف القاعدة

٤ المطلوب اثبات ان المستقيمات الثلاثة الواصلة بين منتصفات أضلاع مثلث تقسمه الى أربعة مثلثات متساوية من عامة الوجوه

٥ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين فى مثلث ينصف أى مستقيم ممدود من رأس المثلث الى قاعدته

٦ ا ب حـ ء متوازى الأضلاع ونقطة س منتصف الضلع ا ء ونقطة ص منتصف الضلع المقابل ب حـ برهن على أن س حـ ، ص ا يقسمان القطر ء ب الى ثلاثة أقسام متساوية

٧ المستقيمات الواصلة بين منتصفات الأضلاع المتجاورة لشكل رباعى تكون شكلا متوازى الأضلاع

٨ اذا نصفت أضلاع الشكل الرباعى ووصل بين منتصفى كل ضلعين متقابلين بمستقيم كان كل من المستقيمين الواصلين منصفا الآخر

٩ – ا ب مستقيم ونقطة م منتصفه ، س ص مستقيم آخر أنزلنا عليه من النقط ا ، م ، ب الأعمدة ا ح ، م د ، ب هـ وكانت ب هـ = ٤٫٢ من السنتيمترات ، ا ح = ٨٫٥ من السنتيمترات والمطلوب ايجاد طول م د وتحقيق ذلك بالقياس ثم البرهنة على أن

م د = $\frac{1}{2}$ (ب هـ + ا ح) أو $\frac{1}{2}$ (ب هـ ~ ا ح)* على حسب كون النقطتين ا ، ب فى جهة واحدة من المستقيم س ص أو فى جهتين مختلفتين منه

١٠ – اذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية وكان جزءا كل قاطع المحصوران بين هذه المتوازيات متساويين كان طول ثانى هذه المتوازيات المحصور بين القاطعين وسطا حسابيا بين المتوازيين الآخرين المحصورين بين القاطعين المذكورين

١١ – شبه منحرف طول احدى قاعدتيه المتوازيتين ا من السنتيمترات والأخرى ب من السنتيمترات والمطلوب اثبات أن المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين مواز للقاعدتين المتوازيتين وطوله يساوى $\frac{1}{2}$ (ا + ب) من السنتيمترات

١٢ – اذا فرضت نقطة مثل ا ومد منها المستقيمان ا س ، ا ص وقسم أحدهما ا س الى خمسة أقسام متساوية ومد من نقط التقسيم مستقيمات متوازية تقابل المستقيم الآخر ا ص فانه يراد قياس كل من هذه المتوازيات الخمسة وأخذ متوسط أطوالها ومقارنته بطول الموازى الثالث ثم البرهنة بطريقة هندسية على أن هذا الموازى الثالث هو متوسط المتوازيات الخمسة

اذكر منطوق نظرية لهذه الحالة تشمل أى عدد فردى من هذه المتوازيات وليكن (٢ ق + ١)

١٣ – اذا أنزلت أعمدة من رؤوس متوازى الأضلاع على مستقيم خارج عنه فانه يطلب البرهنة على أن مجموع العمودين النازلين من رأسين متقابلين يساوى مجموع العمودين الآخرين

(لذلك نصل القطرين ومن نقطة تقاطعهما ننزل عمودا على المستقيم المعلوم)

١٤ – مجموع العمودين النازلين على ساقى مثلث متساوى الساقين من أى نقطة مفروضة على قاعدته يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له

(ينتج من ذلك أن مجموع العمودين النازلين على ساقى المثلث المتساوى الساقين من أى نقطة على قاعدته ثابت أى لا يتغير مقداره مهما تغير وضع النقطة على القاعدة)

ماهو التغير الذى يحصل فى هذه الحالة اذا فرضت النقطة على امتداد القاعدة

١٥ – اذا فرضت نقطة داخل مثلث متساوى الأضلاع وأنزل منها أعمدة على كل من أضلاعه فان مجموع هذه الأعمدة يساوى العمود النازل من أحد رؤوس المثلث على الضلع المقابل له وعلى ذلك فمجموع هذه الأعمدة ثابت

١٦ – اذا كانت المستقيمات المتوازية متساوية كانت مساقطها على مستقيم ما متساوية

* العلامة ~ تدل على «الفرق بين» كميتين

مقيــاس الرسم القطرى

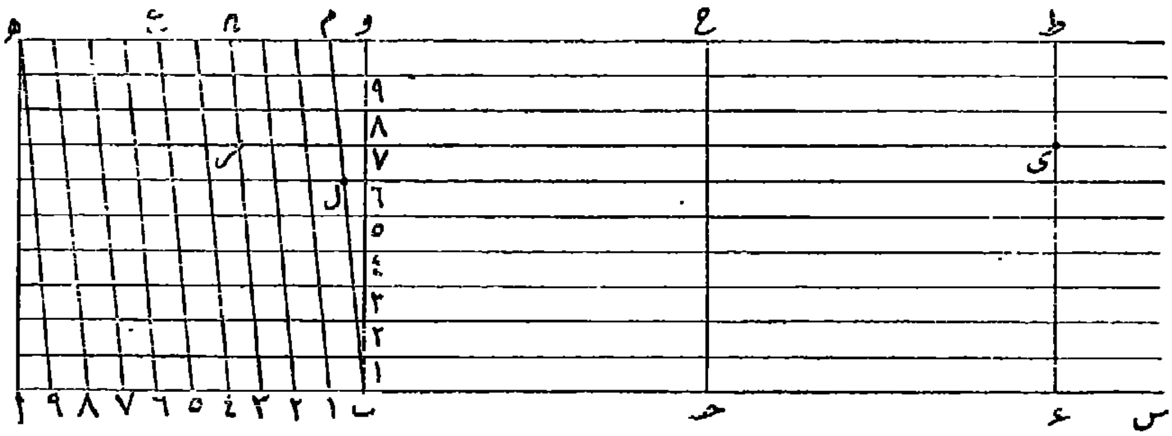
لمـا كانت مقاييس الرسم القطرية من أهم المسائل التطبيقيـة على نظرية ٢٢ راينا أن نبين فائدتها وكيفية انشائها وأن تقتصر فى ذلك على شرح المقياس القطرى العشرى إذ فيه الكفاية فنقول

اذا فرضت قطعة أرض وأريد عمل رسم لهـا وكان مقياسه صغيرا كان الخط الدال على ماطوله متر فى الأرض المذكورة صغيرا لدرجة يصعب معها قياسه بالضبط لكنا نرى ممـا سيجىء أنه يمكن بواسطة المقياس القطرى قياس مثل هذه الأطوال الصغيرة الى درجة عظيمة من الضبط والاحكام

فلو كان مقياس رسم الأرض المذكورة هو $\frac{١}{٢٥٠٠}$ كان

ماطوله متر مدلولا عليه فى الرسم بخط طوله ٠٫٠٠٠٤ من المتر

وماطوله ١٠٠ متر مدلولا عليه فى الرسم بخط طوله ٠٫٠٤ من المتر أى ٤ سنتيمترات



فاذا رسمنـا مسـتقيما ما مثل ا س وركزنا فى نقطة ا وأخذنا عليـه الأبعـاد المتتالية المتساوية ا ب ، ب حـ ، حـ ء الخ على شرط أن كلا منها يساوى ٤ سنتيمترات ثم قسمنا الجزء ب ا الى عشر أقسام متساوية فى النقط ١٫٢٫٣٫٠٠٠ الخ

حدث أن كلا من الأجزاء ا ب ، ب حـ ، حـ ء الخ دال على ماطوله ١٠٠ متر

وأن كلا من الأجزاء العشرة التى انقسم اليها ب ا دال على ماطوله ١٠ امتار

واذا أقمنا من ا ، ب ، حـ ، ء أعمدة على ا س مثل ا هـ ، ب و ، حـ ع ، ء ط الخ وأخذنا على ا هـ عشرة أبعـاد متساوية ومددنا من نهاياتها مستقيمات توازى ا س حصلنـا على عشرة مستقيمات متوازية

نفرض أنها تقطع العمود ب و فى النقط ١٫٢٫٣٫٠٠٠ الخ

ثم نقسم و هـ أحد أجزاء الموازى العاشر الى عشرة أقسام متساوية

فاذا تصورنا وصل نقط تقسيم و هـ بما يناظرها من نقط تقسيم ب ا نرى أن المستطيل و ب ا هـ انقسم الى عشرة مستطيلات جزئية متساوية نصل أقطارها كما هو مبين فى الشكل فيحدث المقياس القطرى العشرى المراد انشاؤه

ثم انه فى المثلث ب و م من حيث ان أجزاء المتوازيات المحصورة بين ب و ، ب م توازى و م ومن حيث ان و م يدل على طول ١٠ أمتار

فبناء على ماتقدم فى نتيجة نظرية ٢٢ نجد أن

فى المثلث ب و م جزء الموازى المرقوم ١ = $\frac{١}{١٠}$ × و م = ١ (مترا)

، « « « ٢ = $\frac{٢}{١٠}$ × و م = ٢ (مترين)

، « « « ٣ = $\frac{٣}{١٠}$ × و م = ٣ (أمتار) وهكذا

وعلى ذلك اذا أريد ايجاد الخط الدال على ماطوله ٦ أمتار مثلا من هذا المقياس كان جزء الموازى المرقوم ٦ ل المحصور بين العمود ب و وبين القطر ب م هو الخط المطلوب

واذا أريد ايجاد الخط الدال على ماطوله ٢٣٧ مترا نجرى العمل هكذا

نركز البرجل فى نقطة تقاطع الموازى ٧ بالعمود د ط ولتكن نقطة ى ثم نفتح البرجل حتى نصل الى نقطة تقاطع هذا الموازى بالقطر ٣ ق ولتكن نقطة ر فيكون ى ر هو الخط المطلوب لأن

ى ر = د ب + ٧ ر

= ٢٠٠ + ٣٠ + ٧

= ٢٣٧ مترا

وبالعكس اذا كان المراد معرفة مايدل عليه طول خط معين فى رسم قطعة الأرض المتقدم ذكرها فلذلك نفتح البرجل بقدر طول هذا الخط المعين ونطبق الفتحة على أحد المتوازيات العشرة على شرط أن يكون احد طرفى البرجل فى نقطة تقاطع الموازى بأحد الأعمدة والطرف الآخر فى نقطة تقاطع هذا الموازى بأحد الأقطار

فمثلا ان كان الخط المعلوم دالا على طول بين ١٠٠ متر و ٢٠٠ متر نفتح البرجل فتحة بقدر طول الخط ونضع أحد طرفى البرجل على العمود حـ ع ونحرك البرجل عليه حتى يقع طرفه فى نقطة تقاطع العمود مع أحد المتوازيات ويقع طرف البرجل الثانى فى نقطة تقاطع هذا الموازى بأحد الأقطار.

فاذا فرضنا أن الموازى هو السادس مثلا وأن القطر هو ٥ ع حدث أن طول الخط المعلوم دال على ١٠٠ + ٥٠ + ٦ = ١٥٦ مترا

تمارين على المقاييس الطولية

١ خريطة مقياس رسمها ٤ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر ويراد رسم مستقيمين أحدهما يدل على ماطوله ٣٣٦ مترا والآخر يدل على ماطوله ٤٠٨ من الأمتار

٢ خريطة مقياس رسمها ٤ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر ويراد رسم مستقيم يدل على ماطوله ٤١٧ مترا

٣ المطلوب انشاء مقياس رسم قطرى دال على الأمتار على شرط أن يكون طول كل سنتيمترين فيه دالا على ١٠٠ متر

٤ المطلوب رسم مستقيم يكون دالا على ٤٢٥ مترا فى خريطة مقياس رسمها سنتيمتران لكل ١٠٠ متر

الهندسة العملية

العمليات

يلزم لحل العمليات الآتية المسطرة والبرجل فقط اذ لايستدعى العمل أثناء السير فى الحل قياس الخطوط أو الزوايا وعلى ذلك لالزوم لاستعمال المساطر المدرجة أوالمنقلات فى رسم أشكال هذه العمليات

وليس الغرض من هذه العمليات دراستها على انها نظريات فقط بل يجب فى جميع الأحوال أن يعمل الرسم بحيث يراعى فى عمله قواعد الاحكام والضبط

وقد رأينا أن نردف كل مسألة عملية ببرهانها النظرى ولكن هذا لايمنع من تحقيق نتيجة العمل وصحة الرسم بالقياس

وتدل الخطوط المنقوطة فى أشكال هذه العمليات على أنها جاءت لقصد البرهان تمييزا لها من الخطوط اللازمة فى جوهر العملية

وينبغى أن يكون لدى الطالب الأدوات الآتية ليتمكن من اجراء العمل وحل الدعاوى

١ مسطرة مستقيمة الحافة مقسمة من أحد جانبيها الى السنتيمترات والمليمترات ومن الجانب الآخر الى البوصات وأعشارها

٢ مثلثان من الخشب قائما الزاوية أحدهما متساوى الساقين والآخر زاويتا قاعدته ٦٠° ، ٣٠°

٣ برجل

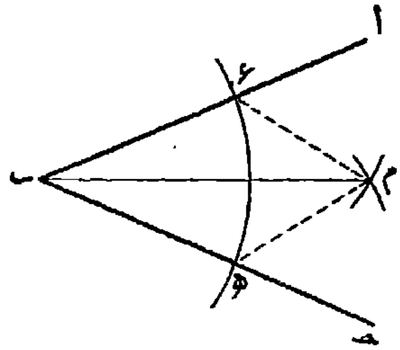
٤ آلة نقل البعد

٥ منقلة مستديرة (نصف دائرة)

عمليات على المستقيمات والزوايا

عملية ١

المطلوب تنصيف زاوية معلومة



نفرض أن ا ب ح الزاوية المعلومة

العمل — نركز البرجل فى ب وبنصف قطر مناسب نرسم قوسا يقطع ب ا فى ى و ب ح فى ﻫ ثم نركز فى كل من ى و ﻫ وبنصف قطر يساوى ى ﻫ نرسم قوسين يتقاطعان فى م ونصل ب م فيكون هو منصف الزاوية ا ب ح

البرهان — نصل ى م و ﻫ م

ففى المثلثين ى م ب و ﻫ م ب

من حيث ان { ى م = ﻫ م
و ى ب = ﻫ ب
و م ب مشترك }

∴ ينطبق Δ ى م ب على Δ ﻫ م ب تمام الانطباق (نظرية ٧)

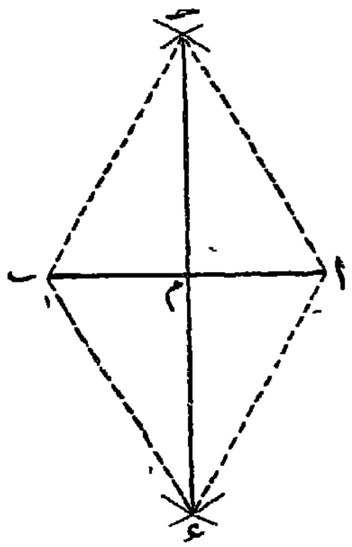
أى أن ∠ ى ب م = ∠ ﻫ ب م

∴ ب م هو منصف ∠ ا ب ح

تنبيه — يشاهد أننا ركزنا فى ى و ﻫ ورسمنا قوسين بنصف قطر يساوى البعد ى ﻫ وان تقاطع هذين القوسين عين النقطة م مع أنه لايلزم أن يكون نصف قطر هذين القوسين مساويا للبعد ى ﻫ فانه يمكن أن يساوى اى بعد كان على شرط أن يكون كافيا لتقاطع القوسين

عملية ٢

المطلوب تنصيف مستقيم محدود



نفرض أن ا ب هو المستقيم

العمل — نركز فى ا وببعد يساوى ا ب نرسم قوسا فوق ا ب وآخر تحته ثم نركز فى ب وببعد يساوى ب ا نرسم قوسين يقطعان الأولين فى ح ٬ ء ونصل ح ء فيقطع ا ب فى نقطة م فتكون هى منتصف ا ب

البرهان — نصل ا ح ٬ ب ح ٬ ا ء ٬ ب ء

ففى المثلثين ا ح ء ٬ ب ح ء

من حيث ان { ا ح = ب ح (لكونهما نصفى قطرين متساويين) ٬ ا ء = ب ء (« « « «) ٬ ح ء مشـــترك

∴ ∠ ا ح ء = ∠ ب ح ء (نظرية ٧)

وكذلك فى المثلثين ا ح م ٬ ب ح م

من حيث ان { ا ح = ب ح ٬ ح م مشـــترك ٬ ∠ ا ح م = ∠ ب ح م

∴ ا م = م ب (نظرية ٤)

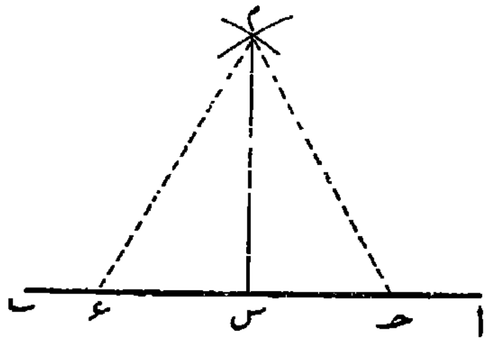
أى ان م منتصف ا ب

تنبيه ١ — ليس من الضرورى أن يكون نصف القطر الذى ركزنا له فى ا ٬ ب ورسمنا القوسين فوق المستقيم وتحته مساويا البعد ا ب بل يمكن أن يكون مساويا لأى بعد كان على شرط أن يكون كافيا لأن يتقاطع كل قوسين لاحداث النقطتين ح ٬ ء اللتين بواسطتهما يتعين المستقيم ح ء

٢ — يؤخذ من تطابق المثلثين ا ح م ٬ ب ح م ان الزاويتين ا م ح ٬ ب م ح متساويتان ولكونهما متجاورتين كل منهما قائمة فيكون ح م عمودا على أن ا ب مارا بمنتصفه

عملية ٣

المطلوب اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه



نفرض ان ا ب هو المستقيم المعلوم و س النقطة المفروضة عليه

العمل — نركز في س وبنصف قطر مناسب نعين النقطتين حـ و ء على ا ب بحيث يكون س حـ = س ء

ثم نركز في كل من حـ و ء وبنصف قطر يساوى حـ ء نرسم قوسين يتقاطعان في م

ثم نصل م س فيكون عمودا على ا ب

البرهان — نصل م حـ و م ء

ففي المثلثين م س حـ و م س ء

من حيث ان:
- حـ س = ء س عملا
- و م س مشترك
- و م حـ = م ء لأنهما نصفا قطرين في دائرتين متساويتين

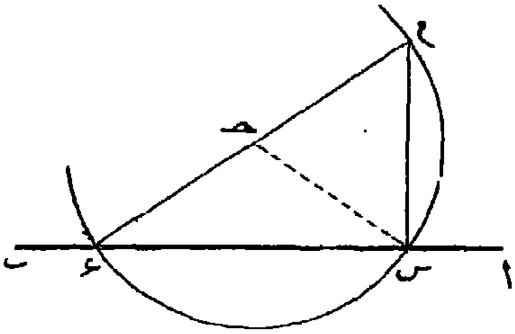
∴ ∠ م س حـ = ∠ م س ء (نظرية ٧)

ولكونهما متجاورتين كل منهما قائمة

أى أن س م عمود على ا ب

ملاحظة — اذا كانت نقطة س قريبة من أحد طرفى المستقيم المعلوم يتبع في طريقة حل المسألة حينئذ إحدى الطريقتين الآتيتين

الطريقة الأولى



العمل — نفرض نقطة مثل ح خارج المستقيم ا ب ونركز فيها وبنصف قطر يساوى ح س نرسم محيط دائرة يقطع ا ب فى ء

ثم نصل ء ح ونمده على استقامته حتى يلاقى المحيط فى م

ثم نصل س م فيكون هو العمود المطلوب

البرهان — نصل ح س

فمن حيث ان ح م = ح س

∴ ∠ ح س م = ∠ ح م س

ومن حيث ان ح ء = ح س

∴ ∠ ح س ء = ∠ ح ء س

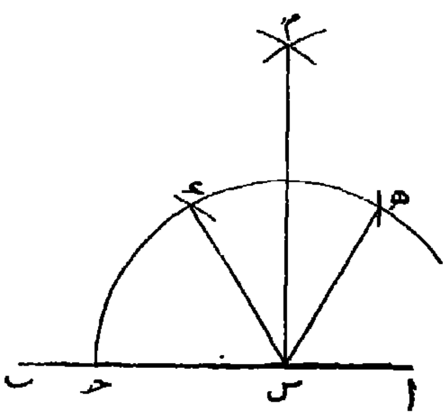
∴ الزاوية الكلية ء س م = ∠ س م ء + ∠ س ء م

= نصف °١٨٠

= °٩٠

س م عمود على ا ب

الطريقة الثانية



العمل — نركز فى س وبنصف قطر مناسب نرسم قوسا يقطع ا ب فى ح

نركز فيها وبالبعد عينه نرسم قوسا يقطع الأول فى ء

نركز فيها وبالبعد عينه نرسم قوسا آخر يقطع القوس الأول فى هـ

ثم نصل ء س ، هـ س

وننصف ∠ ء س هـ بالمستقيم س م (عملية ١)

فيكون س م هو العمود المطلوب

البرهان — يمكن إثبات أن كلا من الزاويتين ء س ح ، ء س هـ تساوى °٦٠

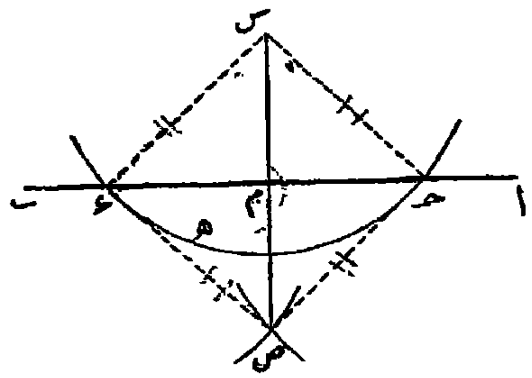
ومن حيث ان ∠ م س ء = $\frac{1}{2}$ ∠ هـ س ء

∴ ∠ م س ح = °٩٠

أى أن س م عمود على ا ب

عملية ٤

المطلوب انزال عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه



نفرض أن س النقطة المطلوب انزال العمود منها على ا ب

العمل — نركز فى س وبنصف قطر مناسب نرسم قوسا يقطع ا ب فى النقطتين ح ، ء

نركز فى كل منهما وبنصف قطر يساوى ح س نرسم قوسا تحت المستقيم ا ب فيتقاطع القوسان فى ص

نصـــل س ص قاطعا للمستقيم ا ب فى م

فيكون س م عمـــودا على ا ب

البرهان — نصل ح س ، ء س ، ح ص ، ء ص

ففى المثلثين ح س ص ، ء س ص

من حيث ان { ح س = ء س ، ح ص = ء ص ، س ص مشـــترك }

∴ ∠ ح س ص = ∠ ء س ص (نظرية ٧)

وفى المثلثين ح س م ، ء س م

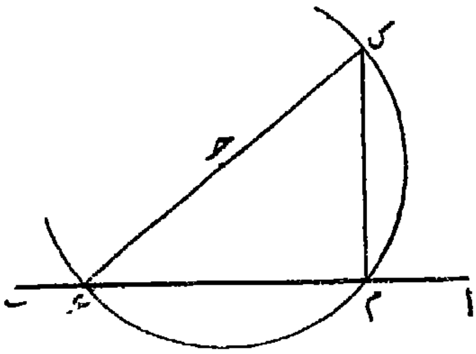
من حيث ان { ح س = ء س ، س م مشـــترك ، ∠ ح س م = ∠ ء س م }

∴ ∠ س م ح = ∠ س م ء (نظرية ٤)

ومن حيث ان هاتين الزاويتين متجاورتان فكل منهما قائمة أى أن س م عمود على ا ب

تنبيه — اذا كانت نقطة س قريبة من احدى نهايتى المستقيم المعلوم يمكن اتباع احدى الطريقتين الآتيتين

الطريقة الأولى

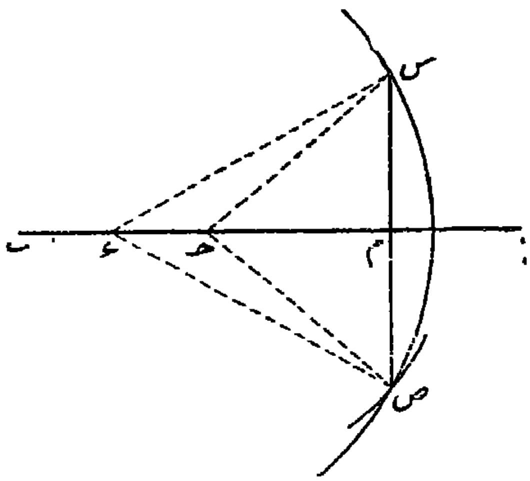


العمل — نفرض أى نقطة مثل ء على ا ب ونصل س ء

ثم ننصفه فى ح ونركز فيها وببعد يساوى ح س نرسم محيط دائرة يقطع ا ب فى م ويمر بنقطة ء

نصل س م فيكون هو العمود على ا ب لأنه كما تقدم فى عملية ٣ (بالطريقة الأولى) ∠ س م ء قائمة

الطريقة الثانية



العمل — نفرض أى نقطتين مثل ء ، ح على ا ب

ثم نركز فى ء وبنصف قطر يساوى ء س نرسم قوسا فى الجهة الأخرى من ا ب غير التى فيها س

ثم نركز فى ح وبنصف قطر يساوى ح س نرسم قوسا آخر يقطع الأول فى ص

نصل س ص قاطعا ا ب فى م

فيكون س م هو العمود

البرهان — △ س ء ح ينطبق على △ ص ء ح تمام الانطباق (نظرية ٧)

∴ ∠ س ء ح = ∠ ص ء ح

△ س ء م ينطبق على △ ص ء م تمام الانطباق (نظرية ٤)

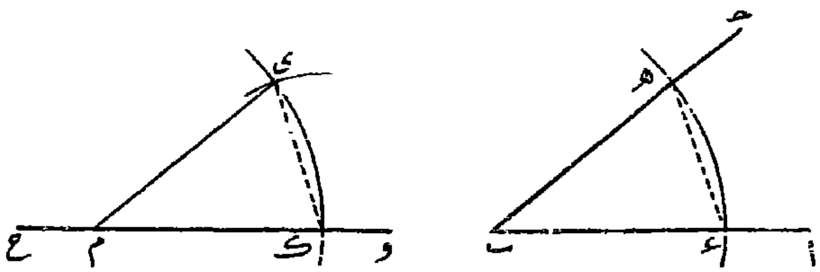
∴ ∠ س م ء = ∠ ص م ء

ومن حيث انهما متجاورتان فكل منهما قائمة

أى أن س م عمود على ا ب

عملية ٥

المطلوب مد مستقيم يصنع مع آخر معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوى زاوية معلومة



نفرض ان ا ب حـ الزاوية المعلومة ، و ع المستقيم المعلوم ، م النقطة المفروضة عليه التى يراد مد مستقيم منها يصنع مع و م زاوية تساوى ا ب حـ

العمل — نركز فى ب وبنصف قطر مناسب نرسم قوسا يقطع ب ا فى ء ، ب حـ فى هـ

ثم نركز فى م وبالبعد عينه نرسم قوسا يقطع و ع فى ك

نركز فى ك وبنصف قطر يساوى ء هـ نرسم قوسا يقطع الأول فى ى

نصل م ى فتكون ى م ك هى الزاوية المطلوبة

البرهان — نصل هـ ء ، ى ك

ففى المثلثين ى م ك ، هـ ب ء

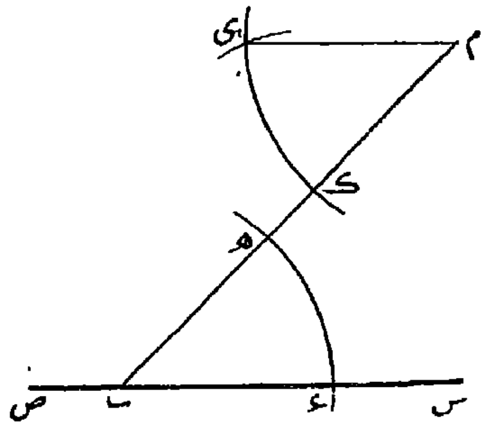
من حيث ان { م ى = ب هـ لأنهما نصفا قطرى دائرتين متساويتين ، م ك = ب ء للسبب عينه ، ى ك = هـ ء بالعمل }

∴ ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق

أى أن ∠ ى م ك = ∠ هـ ب ء (نظرية ٧)

عملية ٦

المطلوب رسم مستقيم يوازى آخر معلوما من نقطة مفروضة



نفرض ان س ص المستقيم المعلوم ، م النقطة المفروضة التى يراد مدّ مستقيم منها يوازى س ص

العمل — نفرض نقطة مّا مثل ب على س ص ونصل م ب

ثم نرسم من نقطة م المستقيم م ى صانعا مع م ب زاوية ى م ب تساوى زاوية م ب س (بعملية ٥) وتكون متبادلة معها

فيكون م ى موازيا س ص*

البرهان — من حيث ان ب م قاطع للمستقيمين م ى ، س ص

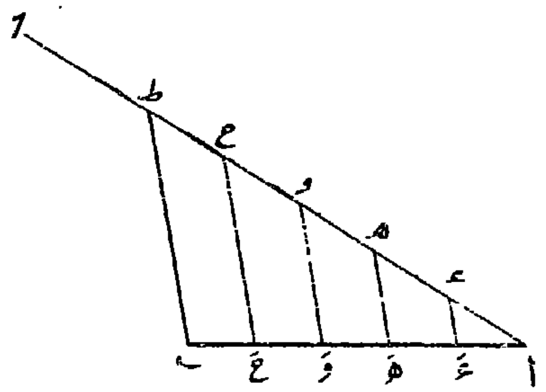
والزاويتان المتبادلتان ى م ب ، س ب م متساويتان

∴ م ى يوازى س ص

* كثيرا ما يسهل رسم الأعمدة والمتوازيات فى العمليات ٣و٤و٦ باستعمال المثلثات ولذا يستغنى عادة عن اجراء العمل على الكيفية المبينة هنالك

عملية ٧

المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى عدد مّا من الأقسام المتساوية



نفرض أن ا ب المستقيم المعلوم المراد تقسيمه الى خمسة أقسام متساوية

العمل — نرسم من ا مستقيما مثل ا حـ غير محدود يصنع مع ا ب زاوية مّا

ثم نأخذ على ا حـ خمسة ابعاد متساوية ولتكن ا ء ، ء هـ ، هـ و ، و ح ، ح ط

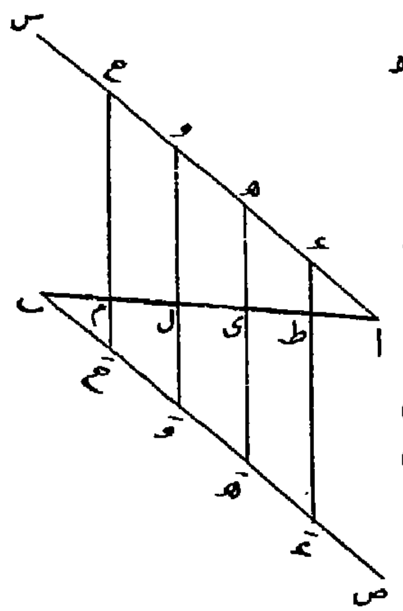
ونصل ط ب ونرسم من كل من ء ، هـ ، و ، ح مستقيمات توازى ط ب وتقابل ا ب في ءَ ، هَ ، وَ ، حَ

فمن حيث ان ء ءَ ، هـ هَ ، و وَ ، ح حَ ، ط ب مستقيمات متوازية

والأجـزاء ا ء ، ء هـ ، هـ و ، و ح ، ح ط كلها متساوية بالعمل

فان الأجزاء ا ءَ ، ءَ هَ ، هَ وَ ، وَ حَ ، حَ ب تكون متساوية كذلك (نظرية ٢٢)

(طريقة أخرى)



نرسم من ا مستقيما مثل ا س يصنع مع ا ب زاوية مّا

ثم نأخذ على ا س أربعة ابعاد متساوية مثل ا ء ، ء هـ ، هـ و ، و ح

ونرسم من ب المستقيم ب ص موازيا ا س

ثم نأخذ عليه اربعة أبعاد متساوية مثل ب حَ ، حَ وَ ، وَ هَ ، هَ ءَ كل منها يساوى احد الابعاد المأخوذة على ا س

ثم نصل المستقيمات ء ءَ ، هـ هَ ، و وَ ، ح حَ فتقطع ا ب في ط ، ى ، ل ، م التي بها ينقسم المستقيم ا ب الى خمسة أقسام متساوية

[وبرهان ذلك يرجع الى نظريتى ٢٠ ، ٢٢]

تمـارين على الخطوط والزوايا

(تمـارين تخطيطية)

١ المطلوب رسم زاوية تساوى ٦٠ باستعمال المسطرة والبرجل فقط وتقسيمها الى أربعة اقسام متساوية بطريقة تنصيف الزوايا

٢ قسم الزاوية القائمة الى ثلاثة أقسام متساوية بواسطة التمرين السابق ثم نصف كلا من هذه الأقسام وبذلك بين كيفية تقسيم زاوية ٤٥° الى ثلاثة أقسام متساوية

[تنبيه — لم يعلم حتى الآن حل لتقسيم أى زاوية الى ثلاثة أقسام متساوية]

٣ المطلوب تقسيم مستقيم طوله ٦,٧ من السنتيمترات الى ٥ أقسام متساوية وقياس أحدها بالبوصة (لأقرب جزء من مائة) وتحقيق الناتج بالحساب (مع العلم بأن السنتيمتر = ٠,٣٩٣٧ من البوصة)

٤ المطلوب تقسيم مستقيم طوله ٧,٤ من السنتيمترات الى ٧ أقسام متساوية ثم قياس أحدها بالسنتيمترات الى اقرب مليمتر وتحقيق الناتج بالحساب

٥ ا ب مستقيم معلوم ونقطة س مفروضة عليه أقمنا منها عليه العمود س ى الذى طوله ٦ سنتيمترات رسمنا ى حـ مائلا طوله ١٠ سنتيمترات تلاقى مع ا ب فى حـ والمطلوب قياس س حـ

(تمـارين عملية)

(اشرح كيفية العمل مع البرهان)

٦ المعلوم مستقيم مثل س ص ونقطتان مثل ا ، ب والمطلوب تعيين نقطة على هذا المستقيم تكون على بعدين متساويين من ا ، ب متى يستحيل الحل

٧ المطلوب تعيين نقطة على المستقيم المعلوم س ص بحيث تكون على بعدين متساويين من مستقيمين متقاطعين مثل ا ب ، ا حـ متى يستحيل الحل

٨ المطلوب مد مستقيم من نقطة مفروضة يصنع مع آخر معلوم زاوية تساوى مقدارا معلوما

٩ ا ب مستقيم معلوم ، حـ ، ى نقطتان خارجتان عنه فى جهة واحدة منه والمطلوب رسم مستقيمين منهما على شرط أن يتلاقيا على ا ب ويصنعا معه زاويتين متساويتين

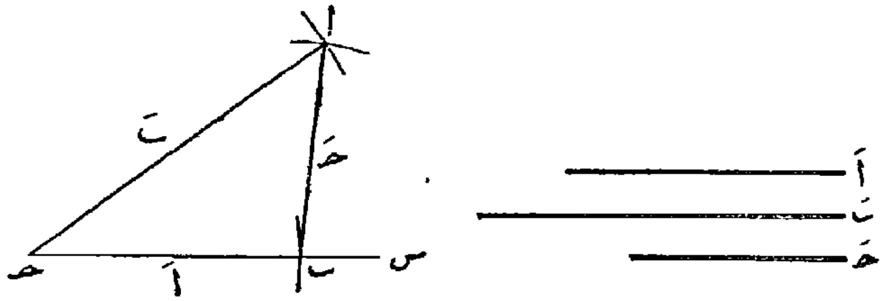
[العمل — ننزل من حـ العمود حـ هـ على ا ب ونمده على استقامته الى حـَ بحيث يكون
هـ حـَ = هـ حـ ثم نصل حـَ ى فيقطع ا ب فى و
نصل حـ و ثم نبرهن على أن حـ و ، ى و هما المستقيمان المطلوبان]

١٠ ارسم مستقيما يمر بنقطة مفروضة مثل حـ بحيث يكون العمودان النازلان عليه من نقطتين معلومتين مثل ا ، ب متساويين وبين ان كانت هذه المسألة ممكنة الحل دائما

في انشـاء المثلثـات

عملية ٨

المطلوب انشـاء المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة



نفرض ان اَ ، بَ ، حَ أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث

العمل — نرسم المستقيم ح س ونأخذ عليه البعد ح ب = اَ

ثم نركز في ب وبنصف قطر يساوى حَ نرسم قوسا

ثم نركز في ح وبنصف قطر = بَ نرسم قوسا آخر يقطع الأول في ا

نصل ا ب ، ا ح

فيكون ا ب ح المثلث المطلوب لأن الأضـلاع ب ح ، ح ا ، ا ب تسـاوى على الترتيب اَ ، بَ ، حَ

ملاحظة — الفروض الثلاثة اَ ، بَ ، حَ إما أن تدل على مستقيمات تسـاوى في الطول اضلاع المثلث المراد انشاؤه أو على أعداد دالة على أطوال هـذه الأضلاع بأى وحدة كانت كالسنتيمتر أو البوصة

تنبيـه ١ — لامكان حل المسألة المتقـدمة يلزم أن يكون مجموع أى ضـلعين في المثلث أكبر من الثالث (نظرية ١١) لأنه اذا لم يتوفر هذا الشرط وركزنا في ب ، ح لا يتقاطع القوسان في ا

تنبيـه ٢ — اذا ركزنا في ب ، ح ورسمنـا قوسـين فانهما يتقاطعان في ا ويتقاطعان كذلك في نقطة أخرى في الجهة الثانية من المستقيم ب ح اذا مددنا القوسين وعلى ذلك فللمسألة حلان

ملاحظة على انشاء المثلثات

قد رأينا مما تقدم فى صفحة ٥٥ أنه للبرهنة على امكان انطباق المثلثين كل على الآخر تمام الانطباق يلزم أن تساوى ثلاثة أجزاء من أحدهما نظائرها من الثانى لكن يجب فى الأجزاء المذكورة أن تكون مقيدة بشروط مخصوصة إن لم تتوفر لا يلزم انطباق المثلثين

وعلى ذلك يتعين المثلث شكلا ومساحة متى علمت منه ثلاثة أجزاء بشروط مخصوصة

فمثلا يمكن انشاء المثلث اذا علم منه

(أولا) ضلعان (بَ ٤ حَ) والزاوية المحصورة بينهما (ا)

وطريقة العمل فى هذه الحالة واضحة

(ثانيا) زاويتان (ا ٤ ب) وضلع (اَ)

فلكون الزاويتين ا ٤ ب معلومتين يمكن ايجاد الزاوية الثالثة حـ من المتساوية

$$ا + ب + حـ = ١٨٠^\circ$$

ويكفى لانشاء المثلث أن نرسم مستقيما = اَ نجعله قاعدة ونرسم من نهايتيه مستقيمين يصنعان معه زاويتين تساوى احداهما ب والأخرى حـ

فالزاوية الحادثة من تلاقى هذين المستقيمين يجب ان تساوى الزاوية الثالثة ا

(ثالثا) اذا علم من المثلث زواياه الثلاث ا ٤ ب ٤ حـ (على شرط ألا يعلم مع هذا ضلع من أضلاعه) وأريد انشاؤه فانه يمكن انشاء عدة مثلثات زوايا كل منها تساوى نظائرها من الزوايا المعلومة

لأنا اذا رسمنا مستقيما وأخذنا عليه طولا ما وجعلناه قاعدة ورسمنا من نهايتيها مستقيمين يصنعان معها زاويتين تساوى احداهما زاوية من الزوايا المعلومة (ب مثلا) وتساوى الاخرى حـ فان الزاوية الثالثة الحادثة من تلاقى هذين المستقيمين تساوى نظيرتها ا وبهذه الطريقة يمكن رسم عدة مثلثات على قواعد مختلفة زوايا كل منها تساوى الزوايا المعلومة

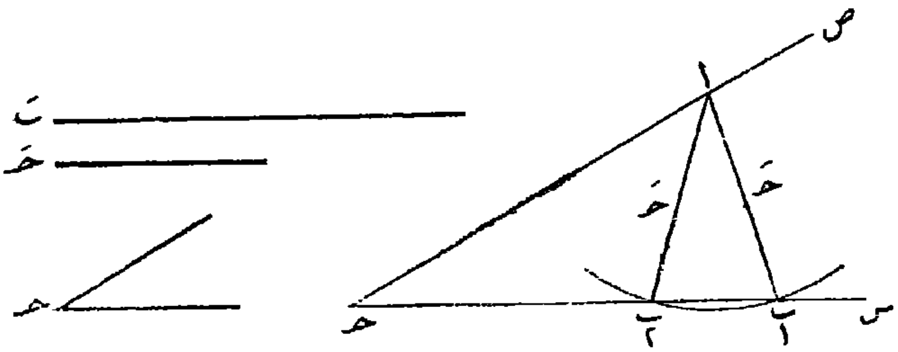
وعلى ذلك فالمسألة لانهاية لعدد حلولها وذلك لان الأجزاء الثلاثة المعلومة مرتبط بعضها ببعض ارتباطا خاصا بحيث لو علم منها اثنان علم الثالث

ويشترط فى الأجزاء الثلاثة المعلومة من المثلث المراد انشاؤه ألا يكون بينها مثل هذا الارتباط

ويقال للفروض التى ليس بينها مثل هذا الارتباط أنها مطلقة أى أن كلا منها قائم بذاته لا يتقيد بالفرضين الآخرين ولايتوقف عليهما فلا يعلم متى علما ولا يتبعهما اذا تغيرا

عملية ٩

المطلوب انشاء المثلث المعلوم منه ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما



نفرض أن بَ ، حَ الضلعان المعلومان ، ح الزاوية المعلومة

العمل — نرسم مستقيما ما مثل س ح ونرسم من النقطة ح المستقيم ح ص صانعا مع ح س الزاوية س ح ص = ∠ ح

ثم نأخذ على ح ص البعد ح ا = بَ

ونركز في ا وبنصف قطر يساوي الضلع الثاني حَ نرسم قوسا

فان قطع هذا القوس المستقيم س ح في النقطتين ب١ ، ب٢ وكانتا في جهة واحدة من النقطة ح توفرت في كل من المثلثين ا ب١ ح ، ا ب٢ ح الشروط المفروضة وكان هو المطلوب

وللمسألة حينئذ حلّان وهذه هي الحالة المبهمة وتأتى اذا كان حَ أصغر من بَ وأكبر من العمود النازل من ا على س ح

تمرين

المطلوب رسم المثلث المعلوم منه الضلعان بَ ، حَ ، ∠ ح المقابلة للضلع حَ في كل من الأحوال الآتية وبيان نوع كل حل وعدد الحلول في كل حالة

(أولا) اذا كان حَ أكبر من بَ

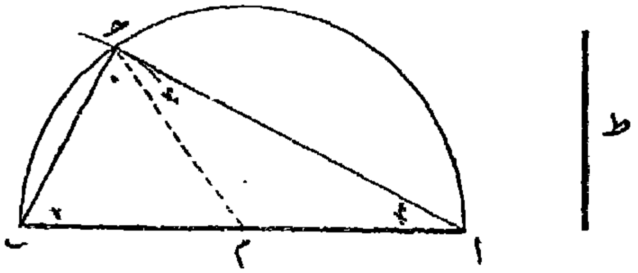
(ثانيا) اذا كان حَ يساوي بَ

(ثالثا) اذا كان حَ يساوي العمود النازل من ا على س ح

(رابعا) اذا كان حَ أصغر من هذا العمود

عملية ١٠

المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر وأحد الضلعين الآخرين



نفرض أن ا ب الوتر المعلوم ، ط الضلع المفروض

العمل — تنصف ا ب فى م ونركز فيها وبنصف قطر يساوى م ب نرسم نصف محيط دائرة ثم نركز فى ب وبنصف قطر يساوى ط نرسم قوسا يقطع نصف المحيط فى ح

نصل ح ب ، ح ا

فيكون ا ب ح المثلث المطلوب

البرهان — نصل م ح

فمن حيث ان م ب = م ح

∴ ∠ م ح ب = ∠ م ب ح

ومن حيث ان م ا = م ح

∴ ∠ م ح ا = ∠ م ا ح

∴ الزاوية الكلية ب ح ا = ∠ م ب ح + ∠ م ا ح

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$ (نظرية ١٦)

$= 90$

تمارين على انشاء المثلثات
(تمارين تخطيطية)

١ ارسم مثلثا أطوال أضلاعه ٧٫٥ من السنتيمترات ، ٦٫٢ من السنتيمترات ، ٥٫٣ من السنتيمترات ثم ارسم وقس الأعمدة النازلة من رؤوسه على الأضلاع المقابلة لها

[تنبيه — هذه الأعمدة تتقاطع فى نقطة واحدة اذا رسمت بالدقة كما سيتبين بعد فى صفحة ٢٢٦]

٢ ارسم المثلث ا ب حـ الذى فيه ا = ٦ سنتيمترات ، بَ = ٥ سنتيمترات ، حـَ = ٥٫٥ من السنتيمترات ثم نصف ∠ ا بمستقيم يقابل القاعدة فى س وقس ب س ، حـ س (لأقرب مليمتر) واستخرج مقدار ب س / حـ س الى رقم واحد عشرى وقارن الناتج بمقدار حـَ / بَ

٣ مزرعة على شكل مثلث طول ضلعين من أضلاعه ٣١٥ مترا ، ٢٦٠ مترا والزاوية المحصورة بينهما تساوى ٣٩° والمطلوب رسم شكل (مقياس رسمه سنتيمتر لكل ٥٠ مترا) وايجاد طول الضلع الثالث بواسطة القياس

٤ قطعة أرض على شكل مثلث مثل ا ب حـ قاعدته ب حـ = ٧٥ مترا ، ∠ ب = ٤٧ ، ∠ حـ = ٦٨ والمطلوب رسم شكل لذلك (مقياس رسمه سنتيمتر لكل ١٠ أمتار) وايجاد مقدار ∠ ا بدون أن تقاس وطول كل من الضلعين الآخرين بواسطة القياس وكذلك العمود النازل من ا على ب حـ

٥ خرجت سفينة من ميناء متجهة نحو الشمال الشرقى بسرعة ٩ كيلومترات فى الساعة وبعد ٢٠ دقيقة غيرت اتجاهها نحو الشمال الغربى وسارت مدة ٣٥ دقيقة بالسرعة نفسها فما بعدها الآن عن الميناء واذا أرادت الرجوع فأى اتجاه (على وجه التقريب) تتجه اليه فى سيرها . ضع لذلك خريطة مقياس رسمها سنتيمتران لكل كيلومتر

٦ ارسم مثلثا قائم الزاوية وتره حـَ = ١٠٫٦ من السنتيمترات وضلعه اَ = ٥٫٦ من السنتيمترات ثم قس مقدار الضلع الثالث بَ واستخرج مقدار $\sqrt{حـ^{2} - ا^{2}}$ وقارن المقدارين

٧ ارسم مثلثا فيه ∠ ب = ٣٤° والضلع بَ = ٥٫٥ من السنتيمترات ، حـَ = ٨٫٥ من السنتيمترات وبين أن للمسألة حلين ثم قس كلا من مقدارى اَ فى المثلثين الحادثين ومقدارى ∠ حـ وبين ان مقدارها فى أحدهما يكمل مقدارها فى الآخر

٨ فى المثلث ا ب حـ الزاوية ا = ٥٠° والضلع بَ = ٦٫٥ من السنتيمترات ويراد رسم مثلث فيه (أولا) اَ = ٧ سنتيمترات و(ثانيا) اَ = ٦ سنتيمترات و(ثالثا) اَ = ٥ سنتيمترات و(رابعا) اَ = ٤ سنتيمترات . بين بالرسم كل الحلول الممكنة فى كل حالة

٩ طريقان متعامدان فى ا تقطعهما ترعة مستقيمة أحدهما فى ب والآخر فى حـ حيث أقيمت فى كل منهما قنطرة فاذا كانت المسافة بين القنطرتين ب ، حـ هى ٤٦١ مترا والمسافة بين ملتقى الطريقين ا والقنطرة ب هى ٢٦١ مترا فانه يطلب وضع رسم يمكن به معرفة طول المسافة من ا الى حـ بالقياس

تمارين عملية

(اشرح كيفية العمل مع البرهان)

١٠ ارسم مثلثا متساوى الساقين قاعدته = ٤ سنتيمترات وارتفاعه ٦,٢ من السنتيمترات ثم برهن على أن الساقين متساويان وقس كلا منهما الى أقرب مليمتر

١١ ارسم مثلثا متساوى الساقين زاوية رأسه تساوى زاوية معلومة والعمود النازل من الرأس على القاعدة يساوى طولا معلوما

ومن ذلك بين طريقة رسم مثلث متساوى الأضلاع طول العمود النازل من أحد رؤوسه على الضلع المقابل له يساوى ٦ سنتيمترات ثم قس أحد أضلاعه الى أقرب مليمتر

١٢ ارسم المثلث ا ب حـ الذى فيه العمود النازل من ا على ب حـ يساوى ٥ سنتيمترات والضلع ا ب = ٥,٨ من السنتيمترات ، ا حـ = ٩ سنتيمترات ثم قس ب حـ

١٣ ارسم المثلث ا ب حـ الذى فيه الزاويتان ب ، حـ تساوى إحداهما الزاوية المعلومة ل والثانية تساوى زاوية معلومة أخرى هى م والعمود النازل من ا على ب حـ يساوى مستقيما معلوما مثل ق

١٤ ارسم مثلثا مثل ا ب حـ (بدون استعمال المنقلة) معلوما منه الزاويتان ب ، حـ والضلع بَ

١٥ ارسم مثلثا متساوى الساقين قاعدته تساوى طولا معلوما وزاوية رأسه تساوى الزاوية المعلومة ل

١٦ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلوما منه الوتر حَ ومجموع الضلعين الآخرين اَ ، بَ واذا كان حَ = ٥,٣ من السنتيمترات ، اَ + بَ = ٧,٣ من السنتيمترات فانه يراد ايجاد كل من اَ ، بَ بالرسم واستخراج مقدار ٢ اَ + بَ بالحساب

١٧ ارسم مثلثا اذا علم منه محيطه وزاويتا القاعدة فاذا كان اَ + بَ + حَ = ١٢ سنتيمترا ، ∠ ب = ٧٠° ، ∠ حـ = ٨٠ فأنشئ المثلث

١٨ ارسم المثلث ا ب حـ اذا علم أن الضلع اَ = ٦,٥ من السنتيمترات ومجموع الضلعين الآخرين يساوى ١٠ سنتيمترات ، ∠ ب = ٦٠°

ثم قس كلا من الضلعين الآخرين بَ ، حَ

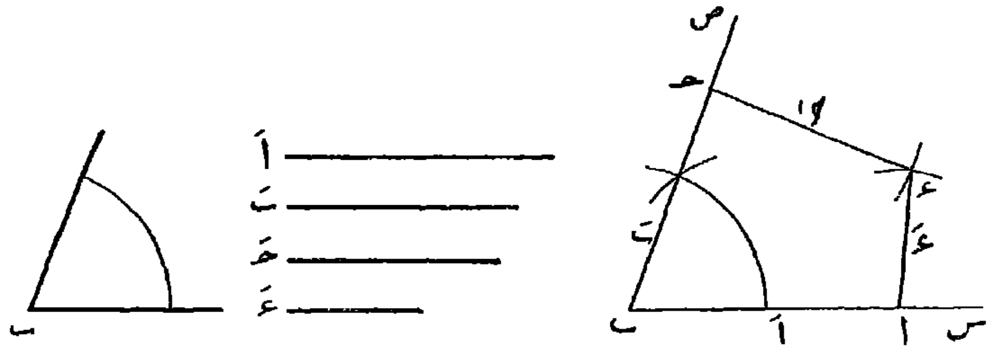
١٩ ارسم المثلث ا ب حـ اذا علم أن اَ = ٧ سنتيمترات ، حَ — بَ = سنتيمترا واحدا ، ∠ ب = ٥٥° ثم قس طول كل من بَ ، حَ

فى انشاء الأشكال الرباعية

قد رأينا أن المثلث يتعين شكلا ومساحة اذا علمت مقادير أضلاعه الثلاثة أما الشكل الرباعى فلا يمكن تعيينه تمـاما من فروض أربعة بل يجب لانشاء الشكل الرباعى خمسة فروض مطلقة كما سيتبين بعد

عملية ١١

المطلوب انشاء الشكل الرباعى المعلوم منه زاوية وأضلاعه الأربعة



نفرض أن آ و بَ و حَ و ءَ أطوال أضلاع الشكل وأن ب الزاوية المعلومة المحصورة بين الضلعين آ ، بَ

العمل — نرسم مستقيما مثل ب س ونأخذ عليه البعد ب ا = الطول آ

ثم نرسم ∠ ا ب ص = ∠ ب المعلومة

ونأخذ على ب ص البعد ب حـ = الطول بَ

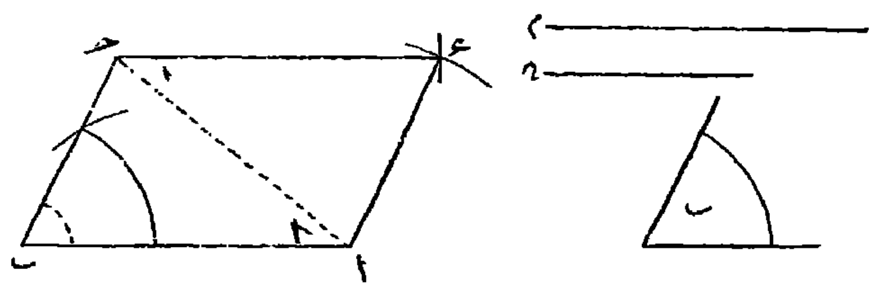
ثم نركز فى حـ وبنصف قطر = حَ نرسم قوسا ونركز فى ا وبنصف قطر = ءَ نرسم قوسا آخر يقطع الأول فى ء

نصل حـ ء ، ا ء

فيكون ا ب حـ ء هو الشكل الرباعى المطلوب لأن أضلاعه تساوى الأطوال آ و بَ و حَ و ءَ المعلومة ، ∠ ا ب حـ = الزاوية المعلومة

عملية ١٢

المطلوب انشاء متوازى الأضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزاوية المحصورة بينهما



نفرض أن م ٤ ى طولا الضلعين المعلومين وأن ب الزاوية المعلومة

العمل — (أولا) طريقة المسطرة والبرجل

نرسم المستقيم ا ب = م ثم نرسم من النقطة ب الزاوية ا ب ح = ∠ ب ونجعل ب ح مساويا ى ثم نركز فى ح وبنصف قطر = م نرسم قوسا ونركز فى ا وبنصف قطر = ى نرسم قوسا آخر يقطع الأول فى ء فيكون ا ب ح ء متوازى الأضلاع المطلوب

البرهان — نصل القطر ا ح

ففى المثلثين ح ء ا ٤ ا ب ح

من حيث ان ح ء = ا ب ٤ ء ا = ب ح ٤ ح ا مشترك

∴ ∠ ء ح ا = ∠ ب ا ح (نظرية ٧)

ولكونهما متبادلتين يكون ح ء موازيا ا ب

ولكون ح ء = ا ب أيضا

∴ ح ب يوازى ا ء ويساويه نظرية ٢٠

∴ ا ب ح ء متوازى الأضلاع المطلوب

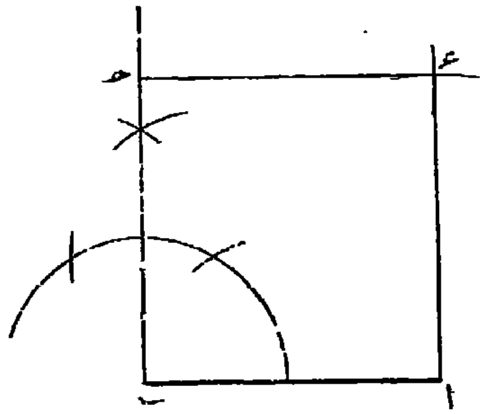
(ثانيا) طريقة المثلثات

نرسم ا ب ٤ ب ح كما تقدم وبواسطة المثلثات نرسم ح ء مارًا بنقطة ح وموازيا ا ب وبهما أيضا نرسم ا ء مارًا بنقطة ا وموزيا ب ح

فيكون ا ب ح ء متوازى الأضلاع بالعمل وهو المطلوب

عملية ١٣

المطلوب انشاء المربع المعلوم ضلعه



نفرض أن ا ب ضلع المربع المعلوم

العمل — (أولا) طريقة المسطرة والبرجل

نقيم من ب عمودا على ب ا ونأخذ عليه البعد ب ح = الضلع المعلوم

ثم نركز فى ا وبالبعد عينه نرسم قوسا

وكذلك فى ح وبالبعد عينه نرسم قوسا يقطع الأول فى ء

فصل ا ء ، ح ء

فيكون ا ب ح ء المربع المطلوب

البرهان — ا ب ح ء شكل متوازى الأضلاع (عملية ١٢)

ومن حيث ان ∠ ا ب ح قائمة فالشكل مستطيل

ومن حيث ان جميع اضلاعه متساوية بالعمل

∴ ا ب ح ء مربع

(ثانيا) طريقة المسطرة والمثلث

نقيم من ب عمودا على ب ا ونأخذ عليه البعد ب ح = الضلع المعلوم ونمد من ح المستقيم ح ء موازيا ا ب

وكذلك نمد من ا المستقيم ا ء موازيا ب ح فيقطع ح ء فى نقطة ء

فيكون ا ب ح ء مستطيلا بالعمل (تعريف ٣ صفحة ٦١)

ومن حيث ان ضلعيه المتجاورين ب ا ، ب ح متساويان

∴ ا ب ح ء مربع

تمارين على انشاء الأشكال الرباعية

١ ارسم معينا ضلعه يساوى طولا معلوما وأحد قطريه يساوى هذا الطول كذلك وأوجد مقدار كل زاوية من زواياه دون أن تقيسها وبرهن على ذلك

٢ ارسم مربعا طول ضلعه ٥ سنتيمترات وبرهن على أن قطريه متساويان وحقق صحة الرسم بقياس كل من هذين القطرين الى أقرب مليمتر

٣ ارسم مربعا طول قطره ٦ سنتيمترات وقس كل ضلع على حدته وأوجد المتوسط للأقيسة الأربعة

٤ ارسم متوازى الأضلاع ا ب حـ ء على فرض أن أحد أضلاعه وهو ا ب = ٥,٥ من السنتيمترات والقطر ا حـ = ٨ سنتيمترات والقطر ب ء = ٦ سنتيمترات وقس ا ء

٥ شكل رباعى قطراه متساويان (طول كل منهما ٦ سنتيمترات) يمر كل منهما بمنتصف الآخر ويصنع معه زاوية تساوى ٦٠° . بين أن فروض هذه المسألة خمسة مطلقة

ثم انشئ الشكل الرباعى واذكر نوعه وبرهن على ذلك وقس محيطه وأوجد مقدار زيادة هذا المحيط فى المائة اذا فرض أن الزاوية المحصورة بين قطريه زادت الى أن صارت ٩٠°

٦ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ٥,٦ من السنتيمترات ، ب حـ = ٢,٥ من السنتيمترات ، حـ ء = ٤ سنتيمترات ، ء ا = ٣,٣ من السنتيمترات

بين أن هيئة الشكل لا يمكن تعيينها من هذه الفروض

ارسم الشكل المذكور فى حالة ما اذا كانت ∠ ا = ٣٠° وفيما اذا كانت تساوى ٦٠ وبين السبب فى عدم امكان رسم الشكل فى حالة ما اذا كانت ∠ ا = ١٠٠°

وأوجد تخطيطيا أقل مقدار لزاوية ا لا يمكن معه رسم الشكل

٧ كيف ترسم شكلا رباعيا اذا علمت أضلاعه الأربعة وأحد أقطاره

وما هى الشروط التى يلزم أن تتوفر فى الفروض المذكورة حتى يمكن حل المسألة

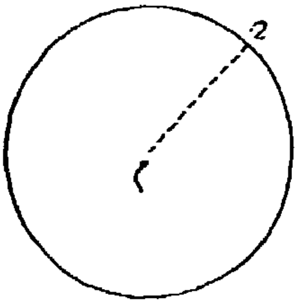
بين الطريقة لذلك بأن ترسم الشكل الرباعى ا ب حـ ء اذا كان

(أولا) ا ب = ٣ بوصات ، ب حـ = ١,٧ من البوصات ، حـ ء = ٢,٥ من البوصات ، ء ا = ٢,٨ من البوصات والقطر ب ء = ٢,٦ من البوصات ثم قس ا حـ

(ثانيا) ا ب = ٣,٦ من السنتيمترات ، ب حـ = ٧,٧ من السنتيمترات ، حـ ء = ٦,٨ من السنتيمترات ، ء ا = ٥,١ من السنتيمترات والقطر ا حـ = ٨,٥ من السنتيمترات ثم قس كلا من الزاويتين ب ، ء

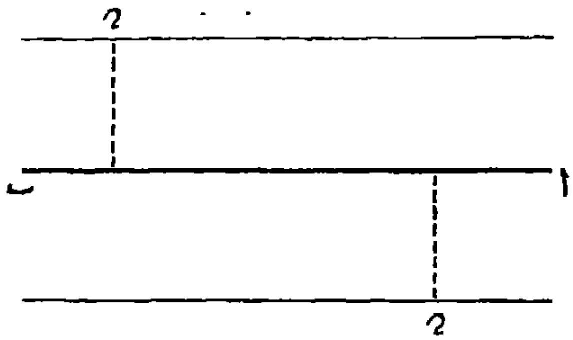
المحل الهندسي

تعريف — المحل الهندسي لنقطة هو مسار هذه النقطة مقيدة بشروط مخصوصة أثناء سيرها



فمثلا (١) اذا فرضنا أن نقطة ى تسير حول نقطة م على شرط مخصوص وهو أن يكون بعدها عن م دائما ثابتا لايتغير (وليكن ١٫٧ من السنتيمترات) فسار هذه النقطة مقيدة بهذا الشرط هو محيط الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها البعد الثابت (١٫٧ من السنتيمترات المفروضة) وهذا المحيط هو المحل الهندسي للنقطة ى

(٢) اذا فرضنا أن النقطة ى تسير على بعد ثابت لايتغير من المستقيم المعلوم ا ب (وليكن هذا البعد سنتيمترا ونصف سنتيمتر مثلا) فان المحل الهندسي لهذه النقطة في هذه الحالة هو أحد المستقيمين الموازيين للمستقيم المعلوم المرسومين كل في جهة منه على البعد الثابت (السنتيمتر والنصف) المفروض



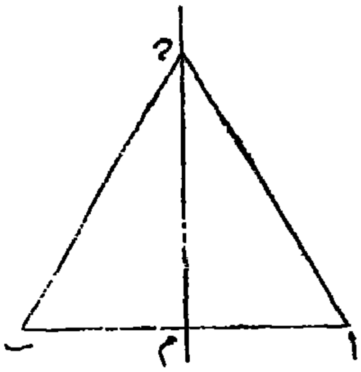
ومن هذا نرى أن المحل الهندسي لنقطة تسير حسب شرط معين هو خط أو أكثر تتقيد النقطة به في سيرها عليه على شرط أن يكون لجميع نقط هذا الخط ما لهذه النقطة من الخواص وألا تتوفر هذه الخواص في أي نقطة أخرى خارجة عنه

أي أن نقط المحل الهندسي تشترك جميعها في خاصة واحدة لا تشترك معها فيها أي نقطة أخرى خارجة عنه

وعلى ذلك يكفي لتعيين المحل الهندسي لنقطة تسير مقيدة بشروط معينة أن توجد سلسلة نقط كل منها تستوفي هذه الشروط وتمر بها النقطة المتحركة المراد تعيين محلها الهندسي

عملية ١٤

المطلوب ايجاد المحل الهندسى للنقطة (ى) التى بعداها عن النقطتين المعلومتين (ا ، ب) دائما متساويان



يؤخذ من هذا أن النقطة ى فى جميع أوضاعها أثناء سيرها يجب أن يكون بعداها عن ا ، ب دائما متساويين اى أن ى ا = ى ب

وعلى ذلك فمنتصف ا ب وهو م يكون أحد أوضاع هذه النقطة أى أن م احدى نقط المحل الهندسى

فاذا فرضنا أن نقطة ى هى أيضا احدى نقط هذا المحل ووصلنا م ى

حدث فى المثلثين ى م ا ، ى م ب انه

من حيث ان { ى ا = ى ب ، ى م مشترك ، م ا = م ب }

∴ ∠ ى م ا = ∠ ى م ب (نظرية ٧)

وعليه فالمستقيم ى م عمود على ا ب من وسطه

ويكون هو المحل الهندسى المطلوب

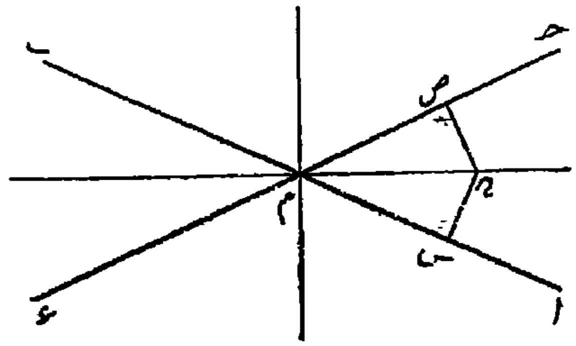
وذلك لأنه

(أولا) ثبت أن كل نقطة مثل ى على بعدين متساويين من ا ، ب تكون احدى نقط العمود المقام على ا ب من وسطه

(ثانيا) تسهل البرهنة على أن كل نقطة من نقط العمود المقام من م على ا ب تكون على بعدين متساويين من ا ، ب

عملية ١٥

المطلوب ايجاد المحل الهندسى للنقطة (ن) التى بعداها عن المستقيمين المعلومين (ا ب ، حـ ء) دائما متساويان



نفرض أن المستقيمين المعلومين ا ب ، حـ ء يتقاطعان فى م وأن ن أحد أوضاع النقطة المعلومة فلو أنزلنا من ن العمود ن س على ا ب والعمود ن ص على حـ ء لحدث على فرض المسألة أن

ن س = ن ص

فاذا وصلنا ن م يحدث

فى المثلثين ن س م ، ن ص م أنه

من حيث ان ⎨ ∠ ن س م = ∠ ن ص م بالقيام
والوتر ن م مشترك
والضلع ن س = الضلع ن ص بالفرض

∴ ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق (نظرية ١٨)

ومنه ينتج أن ∠ ن م س = ∠ ن م ص

أى أن المستقيم ن م ينصف ∠ ا م حـ

وعليه فان كانت النقطة ن داخل هذه الزاوية فتقييدها بشروط المسألة يستلزم أن تكون على منصف الزاوية

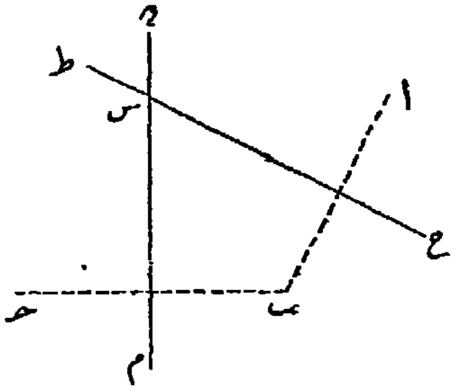
ولو كانت ن داخل ∠ ا م ء لكانت على منصف هذه الزاوية كذلك

وينتج من ذلك أن كلا من المستقيمين اللذين ينصفان الزوايا المحصورة بين المستقيمين المعلومين هو المحل الهندسى المطلوب

تقاطع المحال الهندسية

من فوائد المحال الهندسية أنه يمكن تعيين موضع أى نقطة تتقيد بشرطين وذلك لأن لكل شرط منهما محلا هندسيا خاصا به تسير فيه هذه النقطة فنقطة تقاطع هذين المحلين تستوفى الشرطين معا فى آن واحد

فمثلا (١) اذا أريد تعيين نقطة على أبعاد متساوية من ثلاث نقط معلومة مثل ا ٯ ب ٯ حـ ليست على استقامة واحدة يلاحظ

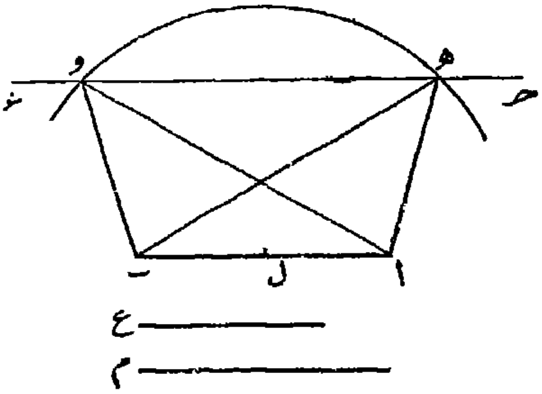


(أولا) أن المحل الهندسى للنقطة المتساوية البعد عن ا ٯ ب هو العمود ع ط المقام على ا ب من وسطه

(ثانيا) أن المحل الهندسى للنقط المتساوية البعد عن ب ٯ حـ هو العمود م ء المقام على المستقيم ب حـ من وسطه

فالنقطة المشتركة بين هذين العمودين وهى نقطة تقاطعهما س تستوفى الشرطين فى آن واحد أى أنها على أبعاد متساوية من النقط ا ٯ ب ٯ حـ

(٢) المطلوب انشاء المثلث اذا علم منه قاعدته وارتفاعه وطول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة



نفرض أن ا ب قاعدة المثلث المطلوب انشاؤه وان ع طول ارتفاعه ٯ م طول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة

فاذا علم وضع رأس المثلث أمكن انشاؤه

ولذلك (أولا) نرسم المستقيم حـ ى يوازى ا ب ويبعد عنه بمقدار يساوى الارتفاع ع

فيكون رأس المثلث المطلوب احدى نقط هذا الموازى

(ثانيا) نركز فى ل منتصف ا ب وبنصف قطر يساوى المستقيم المتوسط م نرسم محيط دائرة

فيكون رأس المثلث المطلوب احدى نقط هذا المحيط

فالنقطة المشتركة بين المستقيم حـ ى والمحيط اذن تستوفى الشرطين المفروضين

أى أنه اذا قطع المستقيم حـ ى محيط الدائرة فى النقطتين هـ ٯ و فان كلا منهما تكون رأسا للمثلث المطلوب انشاؤه . هذا على فرض أن المستقيم المتوسط م أكبر من الارتفاع ع

وقد ترتبط فروض المسألة بعضها ببعض بحيث لا تؤدى الى تقاطع المحلين الهندسيين فتكون المسألة غير ممكنة الحل كما لو كان فى المسألة السابقة المستقيم المتوسط أصغر من الارتفاع فعندئذ لا يتقاطع المستقيم حـ ى والمحيط

ملاحظة — ينبغى فى مسائل تقاطع المحال الهندسية أن يبحث دائما فى الارتباطات التى يجب أن توجد بين فروض المسألة حتى يمكن حلها فان لوحظ ان للمسألة حلين لارتباطات مخصوصة بين الفروض وأن لا حل لها اذا تغيرت هذه الارتباطات فانه لابد أن يوجد بين الارتباطات الأولى والثانية وسط ترتبط به الفروض ارتباطا يتحد به الحلان ويصير للمسألة حل واحد

تمـارين على المحـال الهندسية

١ المطلوب تعيين المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من محيط دائرة معلومة (البعد هنا هو المسافة بين النقطة والمحيط على المستقيم الواصل بينها وبين المركز)

٢ المعلوم المستقيم ا ب ونقطة حـ متحركة عليه . فى أى وضع تكون حـ على بعدين متساويين من نقطتين أخريين مفروضتين خارج المستقيم ا ب

٣ المعلوم نقطتان داخل دائرة والمطلوب تعيين نقط على المحيط كل منها على بعدين متساويين من النقطتين المعلومتين . ما عدد هذه النقط

٤ المعلوم المستقيم ا ب ونقطة ى متحركة عليه . فى أى وضع تكون ى على بعدين متساويين من المستقيمين المعلومين حـ ء ، هـ و

٥ ا ، ب نقطتان ثابتتان البعـد بينهما ٦ سنتيمترات والمطلوب ايجاد نقطتين كل منهما على بعد ٤ سنتيمترات من ا ، ٥ سنتيمترات من ب

٦ ا ب ، حـ ء مستقيمان معلومان والمطلوب ايجاد النقط التى تكون على بعد ٣ سنتيمترات من ا ب ، ٤ سنتيمترات من حـ ء . كم حلا لهذه المسألة

٧ قضيب طوله معلوم يتزلق بين مسطرتين متعامدتين والمطلوب تعيين المحل الهندسي لمنتصفه وبيان أن هذا المحل هو ربع محيط دائرة (راجع عملية ١٠)

٨ ماهو المحل الهندسي لرؤوس المثلثات القائمة الزوايا المرسومة على مستقيم معلوم هو وترلها

٩ المعلوم نقطة ثابتة مثل حـ خارج مستقيم مثل ا ب ونقطة هـ متحركة عليه ويراد تعيين المحل الهندسي لمنتصف حـ هـ والبرهنة على أنه مستقيم يوازى ا ب

١٠ حـ نقطة ثابتة خارج محيط دائرة تتحرك عليه النقطة هـ . عين المحل الهندسي لمنتصف حـ هـ وبرهن على أنه محيط دائرة (راجع تمرين ٣ صفحة ٦٩)

١١ ا ب مستقيم معلوم ، ا حـ عمود على مستقيم ما مار بالنقطة ب ماهو المحل الهندسي لمنتصف ا حـ اذا تحرك ب حـ حول ب

١٢ المستقيمان م س ، م ص متعامدان فى م فرضنا نقطة ما مثل ى داخل الزاوية س م ص وأنزلنا منها العمود ى حـ على م س والعمود ى ء على م ص والمطلوب تعيين المحل الهندسي للنقطة ى بالرسم اذا كان

(أولا) ى حـ + ى ء ثابتا (وليكن ٦ سنتيمترات مثلا)

(ثانيا) ى حـ — ى ء ثابتا (وليكن ٣ سنتيمترات مثلا)

مع البرهنة على كل من الحالتين

١٣ المستقيان م س ، م ص متعامدان فى م ، ه نقطة ما متحركة أنزلنا منها العمود ه حـ على م س والعمود ه ء على م ص والمطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة ه (بدون أن تبرهن على ذلك) اذا كان

(أولا) ه حـ = ٢ ه ء

(ثانيا) ه حـ = ٣ ه ء

١٤ المطلوب ايجاد نقطة على بعد معلوم من نقطة أخرى مفروضة وعلى بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين

متى يكون لهذه المسألة حلان ومتى يكون لها حل واحد ومتى يستحيل

١٥ حـ نقطة ثابتة على بعد ٤ سنتيمترات من المستقيم المعلوم ا ب والمطلوب تعيين نقطتين على بعد ½ ٥ من السنتيمترات من كل من النقطة حـ والمستقيم ا ب

١٦ أوجد جملة نقط كل منها على بعدين متساويين من نقطة معلومة ومستقيم معلوم ثم صل بينها بخط منحن

١٧ المطلوب انشاء مثلث معلوم منه القاعدة والارتفاع بحيث يكون رأسه على مستقيم معلوم

١٨ المطلوب تعيين نقطة على أبعاد متساوية من أضلاع مثلث

١٩ م س ، م ص مستقيان متعامدان فى م فرضنا النقطة حـ على م س والنقطة ء على م ص عين المحل الهندسى لمنتصف المستقيم حـ ء اذا كان

(أولا) م حـ + م ء = مقدارا ثابتا

(ثانيا) م حـ − م ء = مقدارا ثابتا

٢٠ س ، سَ نقطتان ثابتتان والمطلوب ايجاد عدة نقط مرموز لكل منها بالحرف ه بحيث يكون

(أولا) س ه + سَ ه = مقدارا ثابتا (وليكن ٧ سنتيمترات)

(ثانيا) س ه − سَ ه = مقدارا ثابتا (وليكن ٣ سنتيمترات)

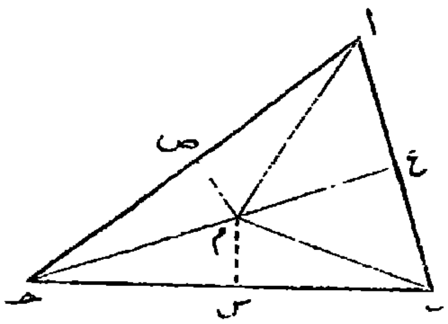
ثم صل كل هذه النقط بخط منحن فى كل من الحالتين

المستقيمات المتلاقية فى نقطة واحدة فى المثلث

١ الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من أوساطها تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة

نفرض أن ا ب حـ مثلث والنقط س ، ص ، ع منتصفات أضلاعه

نقيم من ع عمودا على ا ب ومن ص عمودا على ا حـ فيتلاقيان فى م



نصـــل م س

ثم نبرهن على أن م س عمود على ب حـ

لذلك نصـــل م ا ، م ب ، م حـ

البرهان ـــ من حيث ان ع م عمود على ا ب من منتصفه

فهو المحـل الهنـــدسى للنقط التى على أبعـاد متساوية

من ا ، ب

∴ م ا = م ب

ومن حيث ان ص م عمود على ا حـ من منتصفه

فهو المحل الهندسى للنقط التى على أبعاد متساوية من ا ، حـ

∴ م ا = م حـ

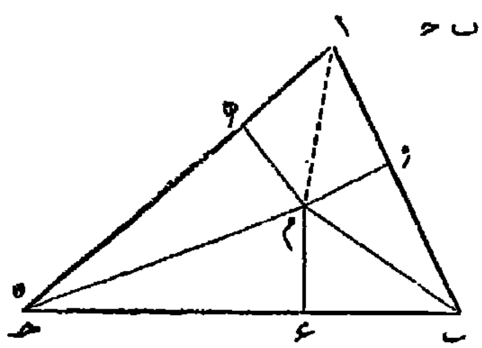
وعليـــه م ب = م حـ

فتكون م احدى نقط المحل الهندسى للنقط التى على أبعاد متساوية من ب ، حـ

أى أن م س عمود على ب حـ

وعلى ذلك فالأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من أوساطها تتلاقى جميعا فى م وهو المطلوب

٢ منصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة



نفرض أن ا ب حـ مثلث نصفت زاويتاه ا ب حـ

، ا حـ ب بمستقيمين يتلاقيان فى م

نصـــل ا م

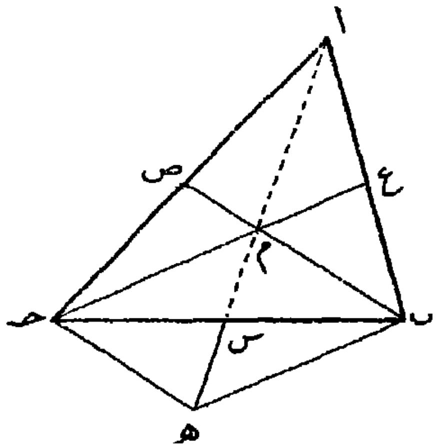
ونبرهن على أن ا م ينصف ∠ ب ا حـ

لذلك ننزل من م الأعمدة م ء ، م هـ ، م و

على أضلاع المثلث

البرهان — من حيث ان ب م ينصف ∠ ا ب حـ
فهو المحل الهندسى للنقط التى على أبعاد متساوية من ب حـ ، ب ا
∴ م ء = م و
وكذلك حـ م هو المحل الهندسى للنقط التى على أبعاد متساوية من حـ ب ، حـ ا
∴ م ء = م هـ
ومنه ينتج أن م و = م هـ
∴ م احدى نقط المحل الهندسى للنقط التى على ابعاد متساوية من ا ب ، ا حـ
وعلى ذلك فمنصفات الزوايا تتلاقى جميعا فى نقطة م وهو المطلوب

٣ المستقيمات المتوسطة للثلث تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة
نفرض أن ا ب حـ مثلث ، ب ص ، حـ ع مستقيمان متوسطان ومتلاقيان فى م



نصل ا م ونمده على استقامته ليقابل ب حـ فى س
ونبرهن على أن ا س ثالث المستقيمات المتوسطة للثلث
لذلك نرسم من ب المستقيم ب هـ يوازى ع حـ ونمد ا س على استقامته ليقابل ب هـ فى هـ ونصل حـ هـ
البرهان — فى △ ا ب هـ
من حيث ان ع منتصف ا ب ، ع م يوازى ب هـ
∴ م منتصف ا هـ (نظرية ٢٢)
وكذلك فى △ ا حـ هـ
من حيث ان ص ، م منتصفا الضلعين ا حـ ، ا هـ
∴ ص م يوازى حـ هـ
أى أن ب م يوازى هـ حـ
∴ فالشكل ب هـ حـ م متوازى الأضلاع
ومن حيث ان قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر
∴ س منتصف ب حـ
أى أن ا س مستقيم متوسط للثلث
وعليه فالمستقيمات المتوسطة للثلث تتلاقى جميعا فى م وهو المطلوب

تعريف — نقطة تلاقى المستقيمات المتوسطة للمثلث تسمى ملتقى المستقيمات المتوسطة

نتيجة — ملتقى المستقيمات المتوسطة فى المثلث على ثلث كل منها من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس

لانه يتعين فى الشكل المتقدم أن

	ا م = م هـ
،	م س نصف م هـ
∴	م س نصف م ا
أى أن	م س ثلث ا س
وكذلك	م ص ثلث ب ص
،	م ع ثلث حـ ع

من هذه النتيجة يتبين أن أصغر مستقيم متوسط فى المثلث هو الذى ينصف أكبر اضلاعه

تنبيه — سيأتى البرهان على ان الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة لها تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة

دعاوى عملية متنوعة

(ينبغى البرهنة على كل مسألة من المسائل الآتية)

١ ا نقطة ما ، ب حـ مستقيم معلوم والمطلوب رسم مستقيات من ا تصنع مع ب حـ زوايا كل منها تساوى زاوية معلومة م

ماعدد هذه المستقيات

٢ نصف الزاوية ا م ب بدون استعمال الرأس م أثناء العمل

٣ ى نقطة ما مفروضة داخل الزاوية ا م ب والمطلوب رسم مستقيم ينتهى طرفاه بضلعى الزاوية على شرط أن تنصفه النقطة ى

٤ م ا ، م ب ، م حـ ثلاثة مستقيات متقاطعة فى م والمطلوب رسم قاطع لها ينتهى طرفاه بالمستقيمين م ا ، م حـ على شرط أن يمر م ب بمنتصفه

٥ المطلوب رسم مستقيم يمر بنقطة مفروضة مثل ا ويكون جزؤه المحصور بين مستقيمين متوازيين معلومين يساوى طولا معلوما

متى يكون لهذه المسألة حلان ومتى يكون لها حل واحد ومتى يستحيل

٦ المطلوب رسم معين داخل المثلث ا ب حـ بحيث تكون احدى زواياه منطبقة على الزاوية ا

٧ استعمل خواص المثلث المتساوى الأضلاع فى تقسيم مستقيم معلوم الى ثلاثة اقسام متساوية

(انشاء المثلثات)

٨ المطلوب انشاء المثلث اذا علم منه

(أولا) نقط منتصفات اضلاعه الثلاثة

(ثانيا) طول ضلعين (كل على حدته) والمستقيم المتوسط الذى ينصف الثالث

(ثالثا) طول أحد الأضلاع وكل من المستقيمين المتوسطين المنصفين للضلعين الآخرين

(رابعا) طول كل من المستقيات المتوسطة الثلاثة

الجزء الثاني

الجزء الثانى

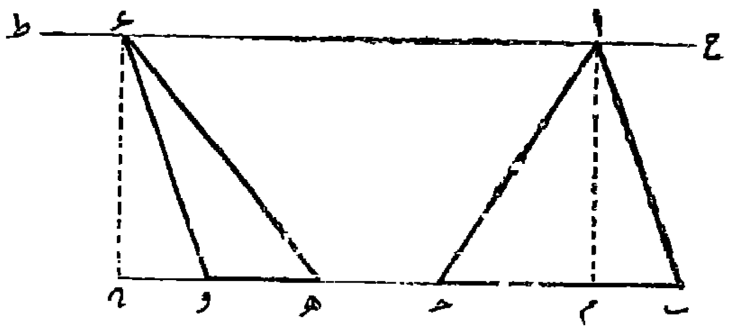
فى المساحات

تعاريف

١ ارتفاع متوازى الاضلاع هو العمود الذى يقاس به البعد بين أحد اضلاعه المعتبر قاعدة والضلع المقابل له

٢ ارتفاع المثلث هو العمود الذى يقاس به البعد بين احد رؤوسه والضلع المقابل له المعتبر قاعدة للمثلث

تنبيه — يؤخذ من هذا أن متوازيات الأضلاع أو المثلثات المحصورة بين مستقيمين متوازيين تتساوى ارتفاعاتها

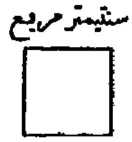


فمثلا اذا كان المثلثان ا ب ﺣ ، ء هـ و محصورين بين المتوازيين ح ط ، ب و وكان ا م ارتفاعا للمثلث ا ب ﺣ ، ء ن ارتفاعا للمثلث ء هـ و

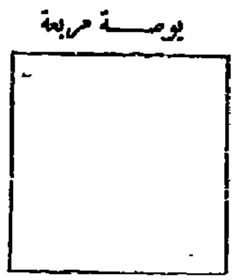
فان الشكل ا م ن ء مستطيل

∴ ا م = ء ن

٣ مساحة الشكل هى مقدار ماتحيط به أضلاعه من السطح



٤ السنتيمتر المربع هو مساحة المربع الذى طول ضلعه سنتيمتر



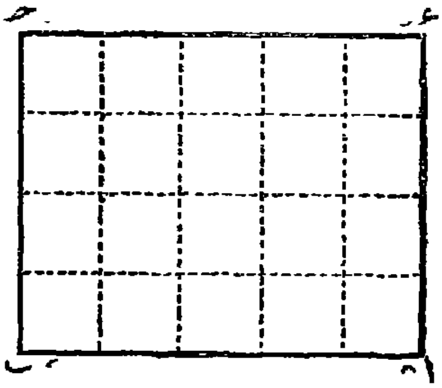
٥ البوصة المربعة هى مساحة المربع الذى طول ضلعه بوصة

وقس على ذلك المتر المربع والياردة المربعة والقدم المربع

٦ وعلى ذلك فوحدة السطوح هى مساحة مربع طول ضلعه وحدة الأطوال

نظرية ٢٣

مساحة المستطيل — اذا ضربنا عدد الوحدات الدالة على طول قاعدة مستطيل فى عدد الوحدات الدالة على طول ارتفاعه فان حاصل الضرب يدل على عدد الوحدات المربعة التى تتكون منها مساحة الشكل



اذا فرضنا أن ا ب ح ء مستطيل طول قاعدته ا ب = ٥ سنتيمترات وطول ارتفاعه اء = ٤ سنتيمترات

فانه يطلب إثبات أن مساحة المستطيل ا ب ح ء = ٥ × ٤ من السنتيمترات المربعة

لذلك نقسم ا ب الى ٥ أقسام متساوية ، ا ء الى ٤ من هذه الأقسام

ونرسم من نقط تقسيم كل منهما مستقيمات توازى الآخر

فبذلك ينقسم المستطيل الى أقسام كل منها سنتيمتر مربع

ومن حيث ان الشكل يحتوى على ٤ صفوف أفقيه فى كل منها ٥ مربعات

∴ يحتوى المستطيل على ٥ × ٤ من السنتيمترات المربعة

فاذا جعلنا ن رمزا لعدد الوحدات الطوليـة الدالة على طول القاعدة ، ع رمزا لعدد الوحدات الطولية الدالة على طول الارتفاع فان المستطيل يحتوى على ن × ع من مربعات هذه الوحدات

واذا كانت ن تدل على عدد وحدات طول ضلع مربع

فان المربع يحتوى على ن^{٢} من مربعات هذه الوحدات

وعلى ذلك تكون

مساحة المستطيل = حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع ... ... (١)

ومساحة المربع = مربع ضلعه ... ... (٢) وهو المطلوب

نتيجة ١ — المستطيلات المتساوية فى القاعدة والارتفاع متكافئة أى أنها متساوية فى المساحة

نتيجة ٢ — المستطيلات المتكافئة ذات القواعد المتساوية تكون ارتفاعاتها متساوية

تنبيـه — يكفى لتعيين المستطيل أن يعلم ضلعاه المتجاوران فانهما يعينان مساحته وشكله واذا كان ا ب ، ا ء ضلعين متجاورين فى مستطيل ما مثل ا ب ح ء فان حاصل الضرب ا ب × ا ء يدل على هذا المستطيل

وكذلك اذا كان ا ب أحد أضلاع مربع ما مثل ا ب ح ء فان المقدار $\overline{\text{ا ب}}^{٢}$ يدل على هذا المربع

تمـارين على الأطوال والمساحات

١ ارسم شكلا يبين أن

(أولا) السنتيمتر المربع = ١٠ من المليمترات المربعة

(ثانيا) الياردة المربعـة = ٣ من الأقـدام المربعة

(ثالثا) القـدم المربع = ١٢ من البوصـات المربعة

٢ ارسم شكلا يبين أن المربع المرسوم على أى مستقيم يساوى أربعـة امثال المربع المرسوم على نصف هذا المستقيم

٣ اذا كان السنتيمتر فى الرسم يدل على ٥ كيلومترات فما هى المساحة التى تدل عليها ٦ سنتيمترات مربعة

تتمـة لنظرية ٢٣

قد استعملنا فى البرهان على نظرية ٢٣ أعدادا صحيحة لقاعدة المستطيل وارتفاعه واستنتجنا القانون المتقدم

وهذا القانون عام للأعداد الصحيحة والكسرية على السواء فمثلا

اذا فرضنا ان قاعدة مستطيل تساوى ٣,٢ من السنتيمترات وارتفاعه يساوى ٢,٤ من السنتيمترات

فان مساحة المستطيل = (٣,٢ × ٢,٤) من السنتيمترات المربعة

لأن القـاعدة = ٣,٢ من السنتيمترات = ٣٢ مليمترا

والارتفـاع = ٢,٤ من السنتيمترات = ٢٤ مليمترا

∴ المساحة = (٣٢ × ٢٤) من المليمترات المربعة

$= \frac{٣٢ \times ٢٤}{١٠}$ من السنتيمترات المربعة

= (٣,٢ × ٢,٤) من السنتيمترات المربعة

تمـارين على مساحة المستطيل والمربع

ارسم على ورق المربعات مستطيلات مقدار القاعدة ق لكل منها معلوم كما سيأتى وكذلك مقدار الارتفاع ع ثم اوجد مساحة كل بالحساب وعدّ المربعات المحصورة بين أضلاعه على الورق للتحقق من النتيجة الحسابية

١ ن = ٥ سنتيمترات ، ع = ٦ سنتيمترات

٢ ن = ١,٥ من السنتيمترات ، ع = ٤ »

٣ ن = ٠,٨ » » ، ع = ٣,٥ من السنتيمترات

٤ ن = ٢,٥ » » ، ع = ١,٤ » »

٥ ن = ٢,٢ » » ، ع = ١,٥ » »

٦ ن = ١,٦ » » ، ع = ٢,١ » »

أوجد بالحساب مساحة كل من المستطيلات التى أبعادها كما يأتى

٧ ن = ١٨ مترا ، ع = ١١ مترا

٨ ن = ٤ ديسمترات ، ع = ٨٢ سنتيمترا

٩ ن = ٢,٥ من الكيلومترات ، ع = ٤ أمتار

١٠ ن = $\frac{1}{4}$ كيلومتر ، ع = ١ سنتيمترا

١١ المطلوب ايجاد ارتفاع المستطيل الذى مساحته ٣٠ سنتيمترا مربعا وقاعدته ٦ سنتيمترات وتحقيق الناتج الحسابى برسم هذا المستطيل على ورق المربعات وعدّ مافيه من المربعات

١٢ المطلوب حساب قاعدة مستطيل مساحته ٣,٩ من السنتيمترات المربعة وارتفاعه ١,٥ من السنتيمترات وتحقيق الناتج الحسابى برسم هذا المستطيل على ورق المربعات وعدّ مافيه من المربعات

١٣ (أوّلا) كم مرّة تتكرر مساحة مستطيل اذا ضوعفت قاعدته ثلاث مرات ولم يتغير مقدار ارتفاعه
(ثانيا) كم مرة تتكرر مساحة مستطيل اذا ضوعف كل من قاعدته وارتفاعه ثلاث مرات
ارسم شكلا يبين ذلك فى كل حالة واذكر قانونا عاما تستنتجه لذلك

١٤ حديقة على شكل مستطيل قاعدته فى الرسم تساوى ٣,٦ من السنتيمترات وارتفاعه ٢,٥ من السنتيمترات فما مساحته اذا كان مقياس الرسم سنتيمترا لكل ١٠ أمتار
وان زادت مساحة الحديقة ٣٠٠ متر مربع فما طولها اذا لم يتغير العرض وكم سنتيمترا تدل على هذا الطول فى الرسم

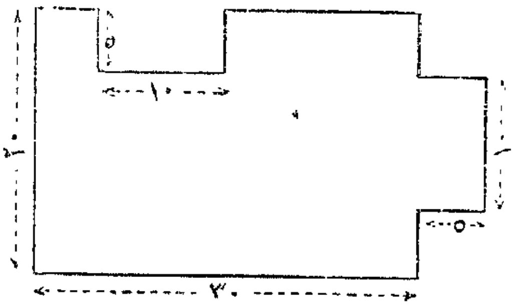
١٥ مامساحة حوش على شكل مستطيل قاعدته فى الرسم ٦,٥ من السنتيمترات وارتفاعه ٤,٥ من السنتيمترات (ومقياس الرسم ١ سنتيمتر لكل ٢٠ مترا)

١٦ رسم مستطيل مساحته ١٤٤٠ مترا مربعا فكانت قاعدته فى الرسم ٤,٥ من السنتيمترات وارتفاعه ٣,٢ من السنتيمترات مامقياس الرسم

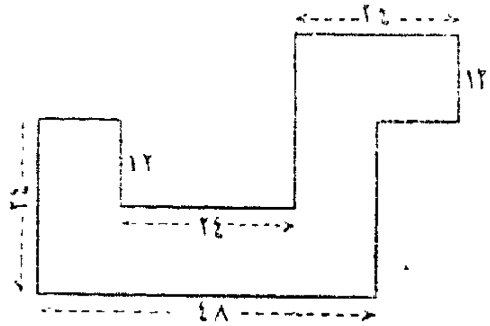
١٧ مزرعة على شكل مستطيل مساحتها ٥٢٠٠٠ قدم مربع رسمت بمقياس سنتيمتر واحد لكل ١٠٠ قدم فاذا كانت قاعدة المستطيل تساوى ٣,٢٥ من السنتيمترات فما طول ارتفاعه

المطلوب حساب مساحة قطع الأرض الآتية أشكالها مع العلم بأن جميع زواياها قوائم وقياس أبعادها بالأمتار

١٨

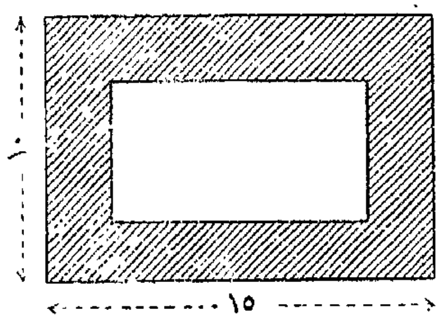


١٩



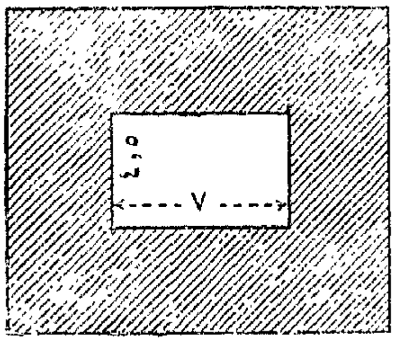
المطلوب حساب مساحة الجزء المظلل فى كل من الأشكال الآتية مع العلم بأن قياس أبعادها بالأمتار

٢٠



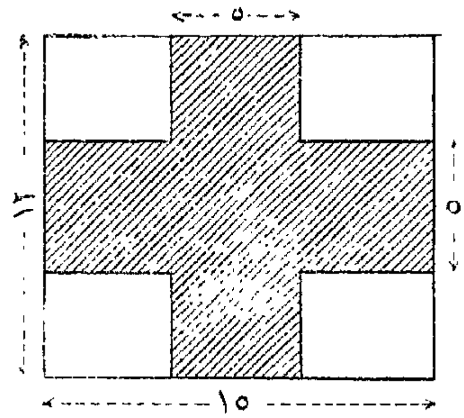
عرض الجزء المظلل ٢٫٥ من الأمتار

٢١

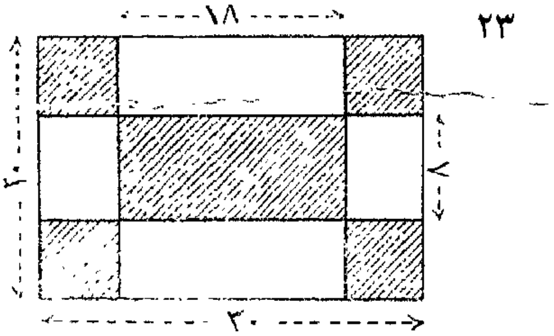


عرض الجزء المظلل ٤ أمتار

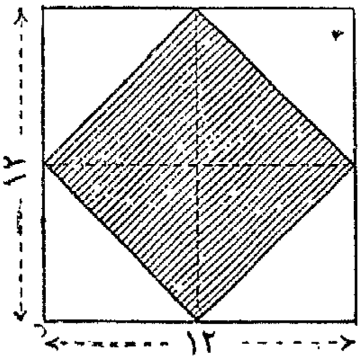
٢٢



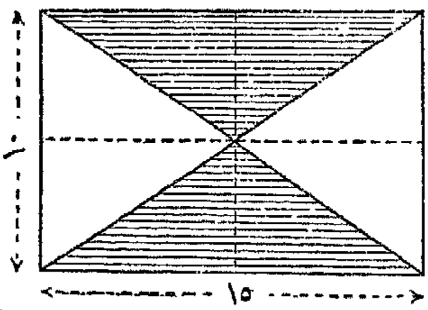
٢٣



٢٤

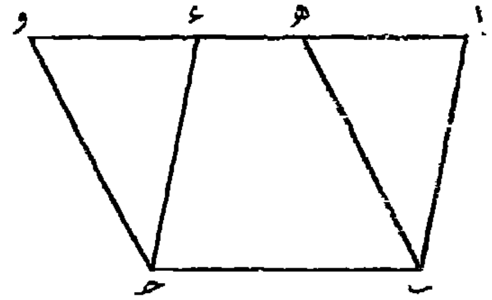


٢٥



نظرية ٢٤

متوازيا الأضلاع المتحدان فى القاعدة والمحصوران بين مستقيمين متوازيين متكافئان



نفرض أن ا ب حـ ء ، هـ ب حـ و شكلان متوازيا الأضلاع متحدان فى القاعدة ب حـ ومحصوران بين المتوازيين ب حـ ، ا و

ويطلب البرهنة على أن ا ب حـ ء = هـ ب حـ و فى المساحة

البرهان — فى المثلثين ا هـ ب ، ء و حـ

من حيث ان
- هـ ب = و حـ (نظرية ٢١)
- ، ∠ ا هـ ب = ∠ ء و حـ (بالتناظر نظرية ١٤)
- ، ∠ هـ ا ب = ∠ و ء حـ

∴ Δ ا هـ ب = Δ ء و حـ (نظرية ١٧)

وعليه فلو طرحنا Δ ا هـ ب من الشكل الكلى ا ب حـ و لكان الباقى متوازى الأضلاع هـ ب حـ و

ولو طرحنا Δ ء و حـ من الشكل الكلى ا ب حـ و لكان الباقى متوازى الأضلاع ا ب حـ ء

∴ هذان الباقيان متساويان

أى أن متوازى الأضلاع ا ب حـ ء = متوازى الأضلاع هـ ب حـ و وهو المطلوب

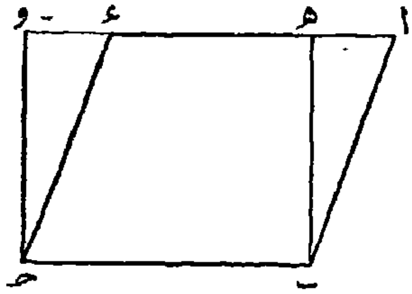
تمرين

المطلوب اثبات هذه النظرية فى حالة ما اذا كان الضلعان ا ء ، هـ و ليس بينهما جزء مشترك (راجع الشكل) وذلك

(أولا) بأن وقعت النقطة هـ على النقطة ء

(ثانيا) بأن وقعت النقطة هـ على امتداد ا ء

مساحة متوازى الأضلاع



ليكن ا ب حـ ء شكلا متوازى الأضلاع ، هـ ب حـ و مستطيلا قاعدة كل منهما ب حـ وارتفاعه هـ ب

فعلى نظرية ٢٤ تكون

مساحة متوازى الأضلاع ا ب حـ ء = مساحة المستطيل هـ ب حـ و

= ب حـ × ب هـ

= القاعدة × الارتفاع

نتيجة — من حيث ان مساحة متوازى الأضلاع لا ترتبط إلا بقاعدته وارتفاعه فمتوازيات الأضلاع ذوات القواعد المتساوية والارتفاعات المتساوية متكافئة

تمارين

(عددية وتخطيطية)

١ ماساحة متوازى الأضلاع اذا كانت

(أولا) قاعدته = ٥,٥ من السنتيمترات وارتفاعة = ٤ سنتيمترات

(ثانيا) قاعدته = ٢,٤ من الأمتار وارتفاعه = ١,٥ من الأمتار

٢ ارسم متوازى الأضلاع ا ب حـ ء مع العلم بأن ا ب = ٦ سنتيمترات ، ا ء = ٤ سنتيمترات ، ــ ا = ٦٥° ثم انزل من نقطة ء عمودا على ا ب وقسه واحسب مساحة متوازى الأضلاع من ذلك بالتقريب وبين لم تكون هذه المساحة تقريبية

ثم انزل من نقطة ب عمودا على ا ء وقسه واحسب مساحة الشكل من حاصل ضرب طول هذا العمود فى طول ا ء ثم أوجد متوسط المساحتين الناتجتين

٣ شكل متوازى الأضلاع طول أحد ضلعيه المتجاورين ٣٠ مترا وطول الآخر ٢٥ مترا والزاوية المحصورة بينهما تساوى ٥٠° والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٥ أمتار ثم حساب ناتجين لمساحة الشكل بواسطة قياس ارتفاعيه كل على حدته وأخذ متوسط هذين الناتجين

٤ ا ب حـ ء شكل متوازى الأضلاع مساحته ٢٦,٦ من السنتيمترات المربعة وطول قاعدته ا ب يساوى ٧ سنتيمترات والمطلوب معرفة طول ارتفاعه

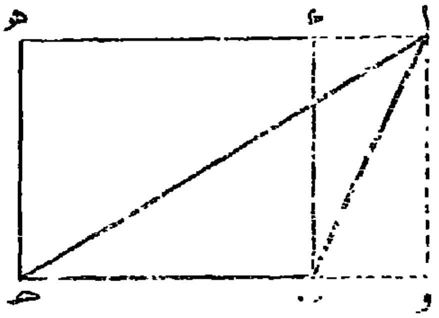
ارسم متوازى الأضلاع المذكور على فرض أن ا ء = ٥ سنتيمترات

٥ معين مساحته ٢٤ سنتيمترا مربعا وطول أحد أضلاعه ٥ سنتيمترات ماهو ارتفاعه .

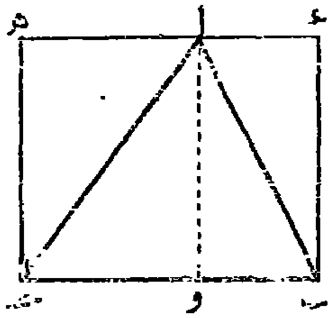
ارسم المعين المذكور وقس احدى زاويتيه الحادتين

نظرية ٢٥

مساحة المثلث ـ مساحة المثلث تساوى نصف مساحة المستطيل المتحد معه فى القاعدة والارتفاع



(شكل ٢)



(شكل ١)

المثلث ا ب ح متحد مع المستطيل ء ب ح ه فى القاعدة ب ح والارتفاع ا و
وتطلب البرهنة على أن △ ا ب ح يكافئ نصف المستطيل ء ب ح ه

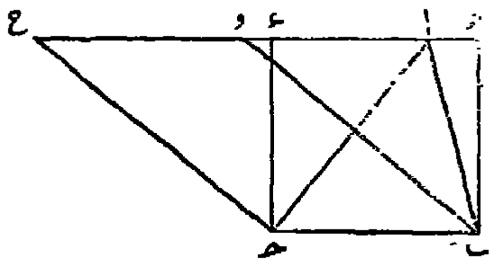
البرهان ـــ من حيث ان ا و عمـــود على ب ح فكل من الشكلين ه و ، ء و مستطيل
ومن حيث ان القطر ا ح يقسم المستطيل ه و الى قسمين متساويين

∴ △ ا و ح = نصف المستطيل ه و

وكذلك △ ا و ب = نصف المستطيل ء و

وبالجمع فى شكل ١ والطرح فى شكل ٢ يحدث أن

△ ا ب ح = نصف المستطيل ء ب ح ه وهو المطلوب



نتيجة ـــ المثلث نصف متوازى الأضلاع المتحد معه
فى القاعدة والمحصور معه بين متوازيين
لأن المثلث ا ب ح = نصف المستطيل ب ح ء ه
وهذا المستطيل = متوازى الأضلاع ب ح ع و
لأنهما متحدان فى القاعدة والارتفاع

∴ △ ا ب ح = نصف متوازى الأضلاع ب ح ع و

مساحة المثلث

اذا دل الرمز ن على طول الضلع ب ح والرمز ع على طول الارتفاع ا و (شكل ١ ، ٢) بوحدة ما من وحدات الأطوال فان مساحة المستطيل ب ح هـ ى = ن × ع من مربعات هذه الوحدة

∴ مساحة المثلث ا ب ح = $\frac{1}{2}$ ن × ع من هذه الوحدات المربعة

أى أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

تمارين على مساحة المثلث

(عددية وتخطيطية)

١ مامساحة المثلث فى كل من الحالات الآتية :

(أولا) القاعدة = ٢٤ مترا والارتفاع = ١٥ مترا

(ثانيا) القاعدة = ٤٫٨ من السنتيمترات والارتفاع = ٣٫٥ من السنتيمترات

(ثالثا) القاعدة = ١٦٠ مترا والارتفاع = ١٢٥ مترا

٢ المطلوب رسم المثلث ا ب ح فى كل من الحالات الآتية :

(أولا) الضلع اَ = ٨٫٤ من السنتيمترات ، بَ = ٦٫٨ من السنتيمترات ، حَ = ٤ سنتيمترات

(ثانيا) الضلع بَ = ٥ سنتيمترات ، حَ = ٦٫٨ من السنتيمترات ، ∠ ا = ٦٥°

(ثالثا) الضلع اَ = ٦٫٥ من السنتيمترات ، ∠ ب = ٥٢° ، ∠ ح = ٧٦°

ثم رسم ارتفاع كل مثلث بالنسبة الى ضلع فيه يعتبر قاعدة وحساب مساحة المثلث بالتقريب بعد قياس الارتفاع

٣ ا ب ح مثلث قائم الزاوية فى ح والمطلوب بيان أن مساحة المثلث تساوى $\frac{1}{2}$ ب ح × ح ا وحساب هذه المساحة اذا كان اَ = ٦ سنتيمترات ، ب = ٥ سنتيمترات

ارسم المثلث بهذه الأبعاد وقس الوتر حَ ثم انزل عليه عمودا من ح وقسه وبذلك أوجد مساحة المثلث على وجه التقريب ثم بين مقدار الخطأ ونسبته فى المائة الى المساحة الحقيقية

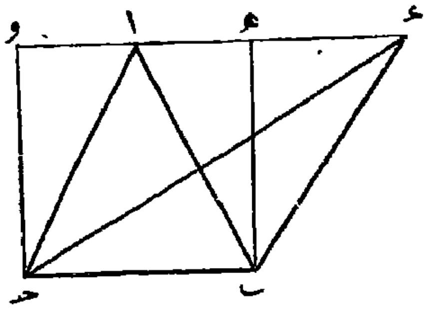
٤ المطلوب اعادة اجراء مافى المسألة السابقة اذا كان اَ = ٦٫٥ من السنتيمترات ، بَ = ٩ سنتيمترات مع العلم بأن الزاوية القائمة هى ح

٥ ماطول ارتفاع مثلث مساحته ٥٠٠ سنتيمتر مربع وطول قاعدته ٥٠ سنتيمترا وما طول القاعدة اذا كانت مساحة المثلث المذكور ١٠٫٤ من السنتيمترات المربعة وارتفاعه ١٫٦ من السنتيمترات

٦ ارسم المثلث ا ب ح الذى طول ضلعه اَ = ٧٫٥ من السنتيمترات ، بَ = ٧ سنتيمترات ، حَ = ٦٫٥ من السنتيمترات وانزل من ا عمودا على ب ح ثم قسه وبذلك أوجد مساحة المثلث بالتقريب

نظرية ٢٦

المثلثات المتحدة فى القاعدة ورؤوسها على مستقيم مواز لهـا متكافئة



الفـرض — ا ب حـ ، د ب حـ مثلثـان متحدان فى القـاعدة ب حـ ورأساهمـا ا ، د على المسـتقيم ا د الموازى ب حـ

والمطلوب اثبـات أن ∆ ا ب حـ يكافئ ∆ د ب حـ

البرهان — اذا كان ب حـ و هـ مستطيلا متحدا مع المثلثين ا ب حـ ، د ب حـ فى القاعدة ب حـ ومحصورا معهما بين متوازيين

يكون ∆ ا ب حـ نصف المستطيل ب حـ و هـ (نظرية ٢٥)

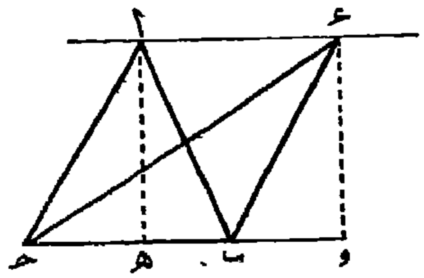
وكذلك ∆ د ب حـ نصف المستطيل ب حـ و هـ

∴ ∆ ا ب حـ يكافئ ∆ د ب حـ وهو المطلوب

وعلى ذلك فالمثلثات ذوات القواعد المتساوية والارتفاعات المتساوية متكافئة

نظرية ٢٧

المثلثات المتكافئة المتحدة فى القاعدة والمرسومة فى جهة واحدة منهـا تكون رؤوسها على مستقيم يوازى تلك القاعدة



الفرض — ا ب حـ ، د ب حـ مثلثان متكافئان مرسومان على قاعدة واحدة ب حـ وفى جهة واحدة منها ، ا هـ ، د و ارتفاعاهمـا

والمطلوب اثبات أن د ا ، ب حـ متوازيان

البرهان — ∆ ا ب حـ يكافئ نصف المستطيل الذى بعداه ب حـ ، ا هـ

وكذلك ∆ د ب حـ يكافئ نصف المستطيل الذى بعداه ب حـ ، د و

∴ المستطيل الذى بعداه ب حـ ، ا هـ = المستطيل الذى بعداه ب حـ ، د و

∴ ا هـ = د و (نظرية ٢٣ نتيجة ٢)

ولكن ا هـ يوازى د و

∴ د ا يوازى و هـ أى يوازى ب حـ وهو المطلوب

تمارين على مساحة المثلث

(مسائل نظرية)

١ ا ب حـ مثلث والمستقيم س ص يوازى القاعدة ب حـ ويقطع ا ب فى س ، ا حـ فى ص
برهن على أنه اذا وصل ب ص ، حـ س فتقاطعا فى ء يحدث
(أولا) أن ∆ س ب حـ يكافئ ∆ ص ب حـ
(ثانيا) أن ∆ ب س ص يكافئ ∆ حـ س ص
(ثالثا) أن ∆ ا ب ص يكافئ ∆ ا حـ س
(رابعا) أن ∆ ب ء س يكافئ ∆ حـ ء ص

٢ برهن على أن المستقيم المتوسط للمثلث يقسمه الى مثلثين متكافئين وارسم مستقيات من رأس المثلث تقسمه الى ثلاثة أجزاء متكافئة

٣ برهن على أن قطرى متوازى الأضلاع يقسمانه الى أربعة مثلثات متكافئة

٤ ا ب حـ مثلث والنقطة ء منتصف قاعدته ب حـ برهن على أنه اذا فرضت نقطة ما مثل ن على المستقيم المتوسط ا ء ثم وصل منها الى ب ، حـ كان ∆ ا ب ن يكافئ ∆ ا حـ ن

٥ ا ب حـ ء متوازى الأضلاع انزل من ب ، ء العمودان ب س ، ء ص على قطره ا حـ برهن على أن ب س = ء ص وعلى ذلك اذا فرضت نقطة مثل ن على القطر ا حـ أو على امتداده فأثبت

(أولا) أن ∆ ا ء ن يكافئ ∆ ا ب ن (ثانيا) ∆ حـ ء ن يكافئ ∆ حـ ب ن

٦ المطلوب اثبات أن المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى الضلع الثالث وذلك بواسطة نظريتى ٢٦ ، ٢٧

٧ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعى شبه المنحرف غير المتوازيين يوازى قاعدتيه المتوازيتين

٨ ا ب حـ ء شكل متوازى الأضلاع والنقطة س منتصف ا ء والنقطة ص منتصف ب حـ برهن على أنه اذا أخذت النقطة ع على س ص أو على امتداده ووصل منها الى ا ، ب كان ∆ ا ع ب ربع متوازى الأضلاع المذكور

٩ ا ب حـ ء شكل متوازى الأضلاع ، س نقطة ما على ا ء ، ص على ء حـ برهن على أن ∆ ب س حـ يكافئ ∆ ا ص ب

١٠ ا ب حـ ء شكل متوازى الأضلاع ، ن نقطة مفروضة داخله برهن على أن مجموع مساحتى المثلثين ن ا ب ، ن حـ ء يساوى نصف مساحة متوازى الأضلاع

تمـارين على مساحة المثلث

(عددية وتخطيطية)

١ مزرعة على شكل مثلث أضلاعه ٣٧٠ مترا ، ٢٠٠ متر ، ١٩٠ مترا والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٥٠ مترا وحساب مساحة المزرعة بالتقريب وذلك بانزال أحد ارتفاعات المثلث وقياسه

٢ حوش على شكل مثلث طول ضلعين منـه ١٢٤ مترا ، ١٤٤ مترا والزاوية المحصورة بينهما تساوى ٤٥° والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٢٠ مترا وحساب مساحة الحوش بالتقريب بعد قياس ماهو لازم لاستخراجها

٣ ا ب حـ مثلث مساحته ٦٫٦ من السـنتيمترات المربعة وطول قاعدته ب حـ ٥٫٥ من السـنتيمترات والمطلوب ايجاد ارتفاعه وتعيين المحل الهندسى للرأس ا ثم رسم المثلث مع العلم بأن ا حـ = ٢٫٦ من السنتيمترات وقياس ا ب

٤ ا ب حـ مثلث مساحته ١٨٫٩ من السنتيمترات المربعة والضلع اً = ٧ سنتيمترات ماطول ارتفاعه أوجد المحل الهندسى للرأس ا وارسم المثلث مع العلم بأن ∠ حـ = ٦٨° ثم قس الضلع بَ

٥ ا ب حـ مثلث طول كل من ضلعيه ب حـ ، ب ا ثابت وليكن الأول ٦ سنتيمترات والثـانى ٥ سنتيمترات فاذا فرض أن الضلع ب ا يدور حول نقطة ب وأن ب حـ ثابت لايتحرك ما هى التغيرات فى مساحة المثلثات الحادثة

لتكن الاجابة على هذه المسألة برسم عدة مثلثات تزداد فيها ∠ ب على التوالى بقدر ٣٠° من الصفر الى ١٨٠° ثم ايجاد مساحة كل مثلث ووضع النتائج فى صورة جدول

(مسائل نظرية)

٦ اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين فى المثلث الأول تكمل الزاوية المحصـورة بين نظيريهما فى الثانى كان المثلثان متكافئين هل يمكن أن ينطبق مثل هذين المثلثين كل على الآخر تمـاما

٧ المطلوب رسم مثلث متساوى الساقين على قاعدة مثلث معلوم بحيث يكافئه

٨ اذا وصل بين منتصفات أضلاع الشكل الرباعى على الترتيب بمستقيمات كان متوازى الأضلاع الحادث (راجع تمرين ٧ صفحة ٦٩) مكافئا لنصف الشكل الرباعى المذكور

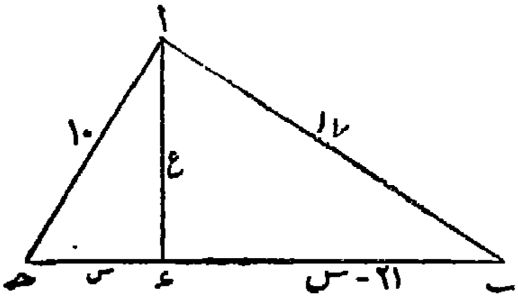
٩ ا ب حـ مثلث ، ى منتصف ا ب ، هـ منتصف ا حـ برهن على أنه اذا تقاطع ب هـ ، حـ ى فى س فان المثلث ب س حـ يكافئ الشكل الرباعى ا ى س هـ

١٠ اذا رسمنا مثلثين متكافئين على قاعدة واحدة كل فى جهة فان هذه القاعدة أو امتدادها تنصف المستقيم الواصل بين رأسى المثلثين

[لابأس بارجاء الطريقة الآتية فى أول الأمر وعلى كل حال فلا يجوز إعطاؤها إلا بعد نظرية ٢٩]

مســاحة المثلث ــ المطلوب حساب مساحة المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة

مثــلا اذا كانت أضــلاع المثلث تساوى ٢١ مترا ، ١٠ أمتــار ، ١٧ مترا فانه يمكن ايجاد مساحته بالطريقة الآتية



نفرض أن ا ب حـ المثلث المعلومة أضــلاعه فلايجاد مساحتـــه

ننزل العمود ا ء على ب حـ ونرمز بالحرف ع لطول ا ء وبالحـــرف س لطول ء حـ فيحـدث أن ء ب = ٢١ — س

ومن نظرية ٢٩ نجد فى المثلث ا ء حـ القائم الزاوية أن $\overline{\text{ا ء}}^2 = \overline{\text{ا حـ}}^2 - \overline{\text{حـ ء}}^2 = ١٠^2 - س^2$

وفى المثلث القــائم الزاوية ا ء ب أنـ $\overline{\text{ا ء}}^2 = \overline{\text{ا ب}}^2 - \overline{\text{ب ء}}^2 = ١٧^2 - (٢١ - س)^2$

∴ $١٠^2 - س^2 = ١٧^2 - (٢١ - س)^2$

أى أن ١٠٠ — $س^2$ = ٢٨٩ — ٤٤١ + ٤٢ س — $س^2$

ومنه ينتج أن س = ٦

ومن حيث ان $\overline{\text{ا ء}}^2 = \overline{\text{ا حـ}}^2 - \overline{\text{حـ ء}}^2$

أو $ع^2 = ١٠^2 - ٦^2 = ٦٤$

∴ ع = ٨

ومن حيث ان مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

∴ مساحة المثلث = ($\frac{1}{2}$ × ٢١ × ٨) من الأمتار المربعة = ٨٤ مترا مربعا

تمــارين

المطلوب ايجاد مساحة المثلث بالطريقة المتقدمة اذا كانت أطوال أضلاعه كما يأتى

١	٢٠ ، ١٣ ، ١١ (من الأمتــار)	٤	٣٠ ، ٢٥ ، ١١ (من السنتيمترات)
٢	١٥ ، ١٤ ، ١٣ (من الياردات)	٥	٣٧ ، ٣٠ ، ١٣ (من الديسيمترات)
٣	٢١ ، ٢٠ ، ١٣ (من الأمتــار)	٦	٥١ ، ٣٧ ، ٢٠ (من الأمتــار)

٧ اذا كانت الأضلاع اَ ، بَ ، حَـ تدل على وحدات مّا من وحدات الأطوال فاثبت

(أولا) أن $س = \frac{اَ^2 + بَ^2 - حَ^2}{٢ اَ}$

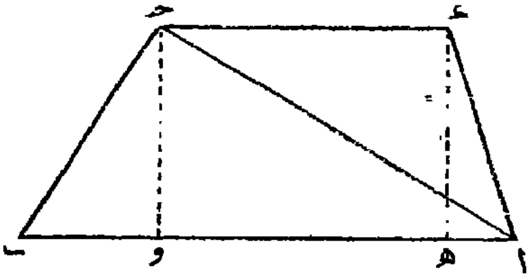
(ثانيا) أن $ع^2 = بَ^2 - \left\{\frac{اَ^2 + بَ^2 - حَ^2}{٢ اَ}\right\}^2$

(ثالثا) أنـ $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(اَ + بَ + حَ)(-اَ + بَ + حَ)(اَ - بَ + حَ)(اَ + بَ - حَ)}$

مساحة الأشكال الرباعية

نظرية ٢٨

المطلوب ايجاد مساحة (أولا) شبه المنحرف (ثانيا) أى شكل رباعى



(أولا) ا ب حـ ء شبه منحرف ضلعاه المتوازيان هما ا ب ، حـ ء

نصل ا حـ وننزل العمودين ء هـ ، حـ و على ا ب فلو رمزنا للقاعدة ا ب بالحرف ن وللقاعدة ء حـ بالحرف نَ

وللارتفاع حـ و أو ء هـ بالحرف ع وكانت هذه الرموز دالة على عدد الوحدات الطولية التى يحتوى عليها كل من هذه الخطوط

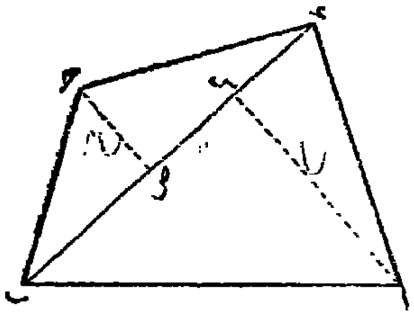
لحدث أن مساحة ا ب حـ ء = △ ا ب حـ + △ حـ ا ء

= $\frac{1}{2}$ ا ب × حـ و + $\frac{1}{2}$ حـ ء × ء هـ

= $\frac{1}{2}$ ن × ع + $\frac{1}{2}$ نَ × ع

= $\frac{1}{2}$ ع (ن + نَ)

أى أن مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب نصف الارتفاع فى مجموع قاعدتيه المتوازيتين



(ثانيا) نفرض أن ا ب حـ ء شكلا رباعيا

ونصل أحد قطريه وليكن ب ء وننزل عليه من ا ، حـ العمودين ا س ، حـ ص

فاذا دلت الرموز م ، ع ، عَ على وحدات الطول التى يحتوى عليها كل من ب ء ، ا س ، حـ ص

فان مساحة الشكل الرباعى ا ب حـ ء = △ ا ب ء + △ ب حـ ء

= $\frac{1}{2}$ ب ء × ا س + $\frac{1}{2}$ ب ء × حـ ص

= $\frac{1}{2}$ م × ع + $\frac{1}{2}$ م × عَ

= $\frac{1}{2}$ م (ع + عَ)

أى أن مساحة الشكل الرباعى تساوى نصف حاصل ضرب أحد قطريه فى مجموع الارتفاعين النازلين عليه من الراسين المقابلين له

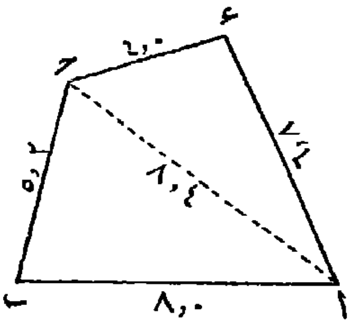
تمــارين

(عددية وتخطيطية)

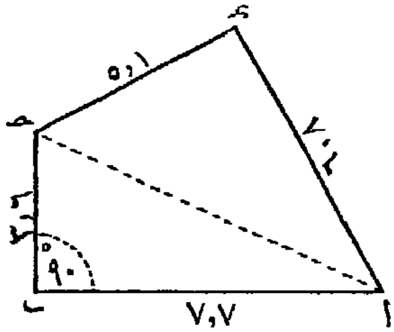
١ المطلوب ايجاد مساحة شــبه المنحرف الذى طول قاعدتيه المتوازيتين ٤,٧ من السنتيمترات ٦ ٣,٣ من السنتيمترات وارتفاعه ١,٥ من السنتيمترات

٢ مامساحة الشكل الرباعى ا ب حـ ء الذى طول قطره ا حـ = ١٧ سنتيمترا والعمود النازل عليه من ب يساوى ١١ سنتيمترا والنازل عليه من ء يساوى ٩ سنتيمترات

٣ حوش على صورة الشكل الرباعى ا ب حـ ء رسم بمقياس سنتيمتر لكل ٥ امتار فكان فى الرسم طول القطـر ا حـ = ٨,٢ من السنتيمترات والعمود النـازل عليه من ب = ٣,٤ من السنتيمترات والنازل عليه من ء = ٢,٦ من السنتيمترات والمطلوب ايجاد مساحة الحوش المذكور



٤ ارسم شكلا رباعيا من الرسم المرفق مع العلم بأن الأبعاد مبينة بالسنتيمترات وانزل عمودين من ب ٦ ء على ا حـ وأوجد مساحة الشكل بعد قياس العمودين المذكورين



٥ ارسم الشكل الرباعى ا ب حـ ء طبقا لمعلومات فى الشكل المرفق مع العلم بأن الأبعاد مبينة بالسنتيمترات ثم أوجد مساحتــه بعد قياس مايلزم لايجادها

٦ المطلوب رسم شبه المنحرف ا ب حـ ء الذى قاعدتاه المتوازيتان ا ب ٦ حـ ء مع العلم بأن ا ب = ١٠ سنتيمترات ٦ ا ء = ب حـ = ٥ سنتيمترات ٦ ∠ ا = ∠ ب = ٦٠° ثم ايجاد مساحته بعد قياس مايلزم لايجادها

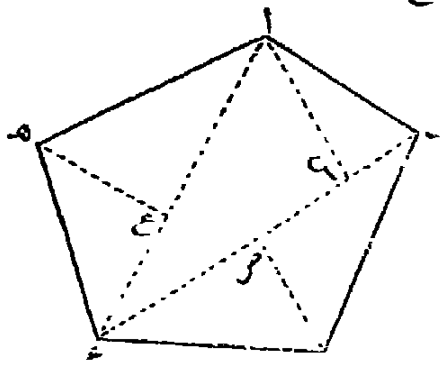
٧ ارسم شبه المنحرف ا ب حـ ء الذى قاعدتاه المتوازيتان ا ب ٦ حـ ء مع العلم بأن ا ب = ٩ سنتيمترات ٦ حـ ء = ٣ سنتيمترات ٦ ا ء = ب حـ = ٥ سنتيمترات ثم أوجد مساحته بعد قياس مايلزم لايجادها

٨ معلوم أن مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ القطر × مجموع العمودين النازلين عليه من الرأسـين المقابلين له أثبت أنه اذا كان قطراه متعامدين كانت مساحته = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

٩ اذا كان طول كل من قطرى الشكل الرباعى ثابتا ومقدار الزاوية المحصورة بينهما ثابتا أيضا فان مساحته لاتتغير مهما تغير وضع نقطة تقاطعهما

مساحة الأشكال الكثيرة الأضلاع

لايجـاد مساحة أى شكل كثير الأضـــلاع طريقتان

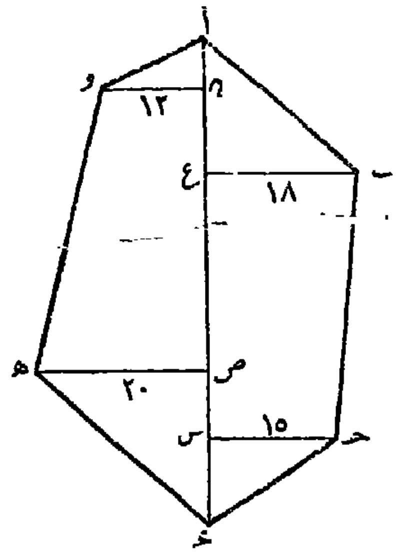


الأولى — تقسم الشكل الى جمـــلة مثلثات ونوجد مساحة كل مثلث بعـد قيـاس مايلزم لايجادها ثم نضم هـذه المساحات بعضها الى بعض

فمثـلا الشكل ا ب ح د هـ يمكن ايجاد مساحته اذا عرفنا طول كل من القطرين د ا ، د ب والاعمــدة ا س ، ح ص ، هـ ع النازلة عليهما

الثـانية — تقسم الشكل الى مثلثات قائمة الزاوية وأشـباه منحرفات قائمة الزاوية بانزال أعمدة من رؤوسه على أحد أقطاره (ا د كما فى الشكل) المعتبر قاعدة للأشكال الحادثة

فلكون أجزاء القاعدة ومقادير الأعمدة النازلة عليها من رؤوس الشكل يمكن أن تقاس بغاية الدقة يتوصل بالطرق المتقدمة الى ايجاد مساحات الأجزاء المختلفة المتركب منها الشكل المذكور ثم تضم بعضها الى بعض والناتج هو مقدار مساحة الشكل



فمثلا لايجاد مساحة الحوش ا ب ح د هـ و من الأقيسة التى فى الجدول الآتى

(فبملاحظة أن أقيســة أجزاء القاعدة د ا مأخوذة من ابتداء نقطة د الى موقع كل عمود نازل عليها من رؤوس الشكل)

	أمتـار	
	د ا = ٥٦	
	د ق = ٥٠	ق و = ١٢
ع ب = ١٨	د ع = ٤٠	
	د ص = ١٨	ص هـ = ٢٠
س ح = ١٥	د س = ١٠	

نجد أن ∆ د س ح = $\frac{١}{٢}$ د س × س ح = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٥ = ٧٥ مـترا مربعا

، ∆ د ص هـ = $\frac{١}{٢}$ د ص × ص هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٠ = ١٨٠ » »

، ∆ ا ع ب = $\frac{١}{٢}$ ا ع × ع ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٨ = ١٤٤ » »

، ∆ ا ق و = $\frac{١}{٢}$ ا ق × ق و = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٢ = ٣٦ » »

وشــبه المنحرف س ح ب ع = $\frac{١}{٢}$ س ع (س ح + ع ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ × ٣٣
= ٤٩٥ مترا مربعا

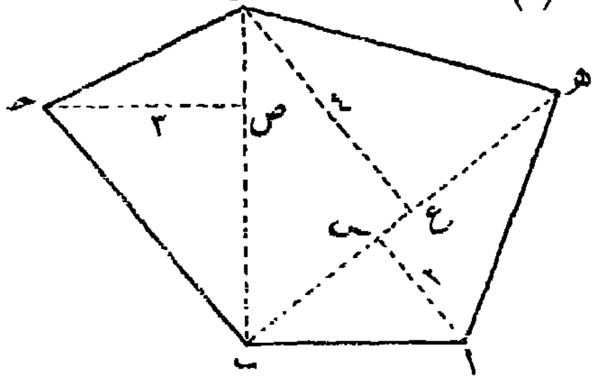
وشــبه المنحرف ص هـ و ق = $\frac{١}{٢}$ ص ق (ص هـ + ق و) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٢ × ٣٢
= ٥١٢ مترا مربعا

وبالجمع يحدث أن مساحة الشكل ا ب ح د هـ و = ١٤٤٢ » »

تمارين

١ المطلوب ايجاد مساحة كل من الشكلين (١) ٯ (٢) اذا قيست أبعادهما بالسنتيمترات

(١)

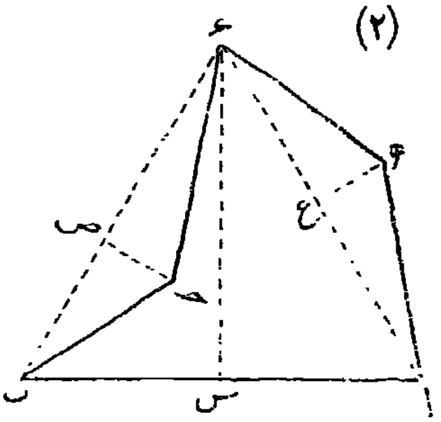


ب ء = ٥ سنتيمترات

ب هـ = ٦ «

ومقادير الأعمدة كما هى مبينة فى الشكل

(٢)



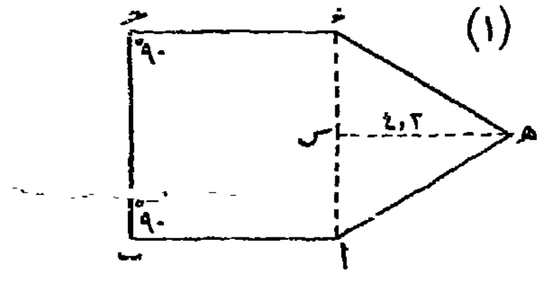
ا ب = ب ء = ء = ٦ سنتيمترات

حـ ص = هـ ع = ١ سنتيمترا

ء س = ٥ر٢ من السنتيمترات

٢ ارسم شكلين كالآتيين بحيث تكون أبعادهما مقدرة بالأقيسة الحقيقية المبينة بعد وأوجد مساحتهما

(١)

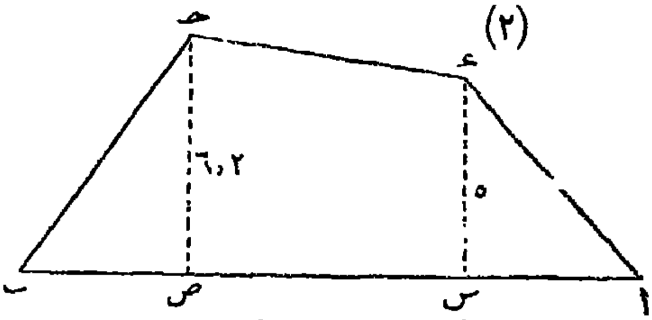


هذا الشكل متساوى الأضلاع

وطول ضلعه ٥ سنتيمترات

وكذلك هـ س مقدر بالسنتيمترات

(٢)

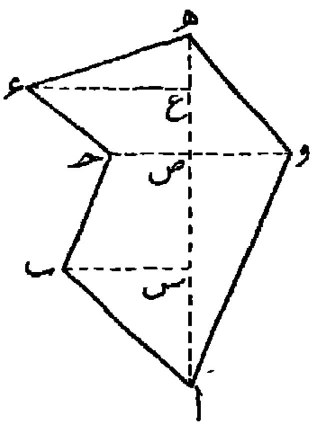


ا س = ٥ر٤ من السنتيمترات

س ص = ٩ر٦ « «

ص ب = ١ر٤ « «

٣ المطلوب ايجاد مساحة الشكل ا ب حـ ء هـ و من المقادير الآتية ووضع رسم بمقياس سنتيمتر لكل ٢٠ مترا



أمتار

ص و = ٥٠	ا هـ = ١٨٠	
	ا ع = ١٥٠	ع ء = ٨٠
	ا ص = ١٢٠	ص حـ = ٤٠
	ا س = ٥٠	س ب = ٦٠

تمـارين على الأشكال الرباعية

(مسائل نظرية)

١ ا ب حـ ى مستطيل نصفنا كلا من أضلاعه فى النقط هـ ، و ، ع ، ط ثم وصلنا بينها على الترتيب بمستقيمات برهن على

(أولا) أن الشكل هـ و ع ط معين

(ثانيا) أن مساحة هـ و ع ط نصف مساحة ا ب حـ ى

ومن ذلك برهن على أن مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب قطريه وبين ماذا كانت هذه القاعدة تسرى على كل شكل رباعى قطراه متعامدان مع ايضاح ذلك بالرسم

٢ برهن على أن أى مستقيم مار بنقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع يقسمه الى جزأين متكافئين ومن هذا بين كيف تقسم متوازى الأضلاع ا ب حـ ى الى جزأين متكافئين

(أولا) بمستقيم يمر بنقطة مفروضة ن

(ثانيا) بمستقيم عمودى على الضلع ا ب

(ثالثا) بمستقيم يوازى آخر معلوما

٣ ا ب حـ ى شـبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان همـا ا ب ، حـ ى برهن على أنه اذا نصف ا ى فى س ورسم مسـتقيم مار بهذه النقطة ومواز ب حـ وقاطع ا ب فى ص وامتـداد حـ ى فى ع يحدث

(أولا) أن شبه المنحرف ا ب حـ ى يكافئ متوازى الأضلاع ص ب حـ ع

(ثانيا) أن شبه المنحرف ا ب حـ ى يكافئ ضعف △ ب س حـ

(مسائل تخطيطية)

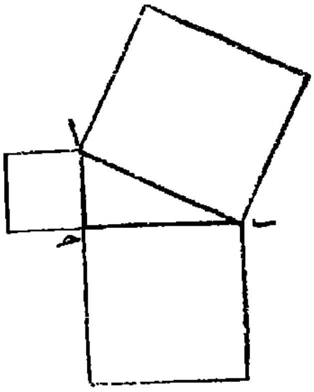
٤ ا ب حـ ى شكل رباعى قطراه متعامدان وطول أحدهما ٧٫٥ من السنتيمترات والآخر ٥٫٥ من السـنتيمترات والمطلوب ايجاد مساحته بين بالرسم أن هـذه المساحة لا تتغير أينما تقاطع القطران ما داما متعامدين

٥ ارسم متوازى الأضلاع ا ب حـ ى الذى فيه ا ب = ٨ سنتيمترات ، ب حـ = ٣٫٢ من السنتيمترات والارتفاع المحصور بين ا ب ، حـ ى يساوى ٣ سنتيمترات واستخرج طول الارتفـاع المحصور بين ب حـ ، ا ى وحقق الناتج بقياس هذا البعد

٦ ارسم شكلا متوازى الأضلاع أحد أضلاعه = ٦٫٣ من السنتيمترات وأحد قطريه = ٨٫٥ من السنتيمترات والآخر = ٦ سنتيمترات ثم أوجد مساحته بعد قياس مايلزم لايجادها

٧ ا ب حـ ى شكل متوازى الأضلاع طول قاعدته ا ب ثابت ومساحته ثابتة والمطلوب ايجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع قطريه

تمـارين تمهيدية لنظرية ٢٩



الغرض من المسائل الآتية مقارنة المربع المنشأ على وتر المثلث ا ب ح القائم الزاوية فى ح بمجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كما هو مبين فى الشكل

١ اذا رسم الشكل المذكور على فرض أن ا ح = ٣ سنتيمترات ، ب ح = ٤ سنتيمترات

حدث أن مساحة المربع المنشأ على ا ح = $٣^{٢}$ أو ٩ سنتيمترات مربعة

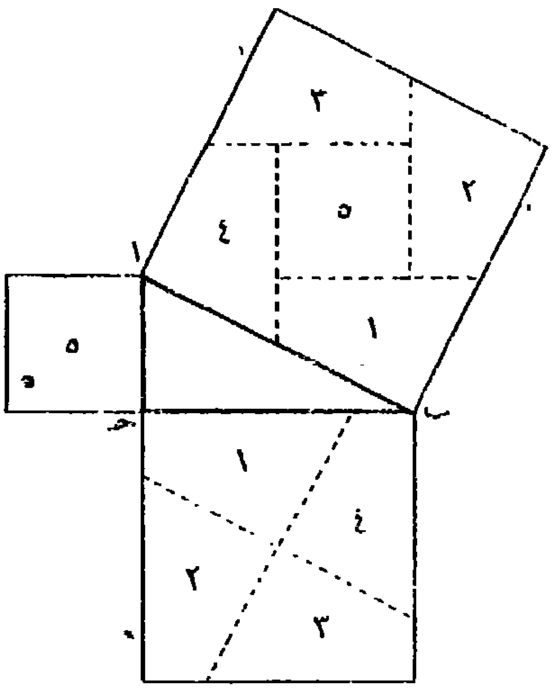
ومساحـــة المربع المنشأ على ب ح = $٤^{٢}$ أو ١٦ سنتيمترا مربعا

∴ مجموع المربعين المنشأين على ا ح ، ب ح = ٢٥ سنتيمترا مربعا

اذا تقرر هذا فقس ا ب واستخرج مساحة المربع المنشأ عليه ثم قارن هـذه المساحة بمجموع المساحتين المتقدمتين

٢ المطلوب عمل التمرين السابق اذا كان ا ح = ٢,٥ من السنتيمترات ، ب ح = ٦ سنتيمترات

٣ اذا كان الضلع اَ = ١٥ ، بَ = ٨ ، حَ = ١٧ بين بالحساب أن $حَ^{٢} = اَ^{٢} + بَ^{٢}$ وارسم على ورق المربعات المثلث ا ب ح الذى طول ضلعه اَ = ١٥ ، بَ = ٨ ، حَ = ١٧ من وحدات طولية ثم قس ∠ ا ح ب



٤ قارن بين مساحة المربع المنشأ على الوتر ا ب ومجموع مساحتى المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين بالطريقة الآتية وهى

أن ترسم فى المربع المنشأ على ب ح مستقيمين أحدهما يوازى الوتر ا ب والآخر عمودى عليه من نقطة ملتقى قطرى المربع فينقسم المربع بهذين المستقيمين الى أربعة أقسام ينطبق كل منها على الآخر تمـاما

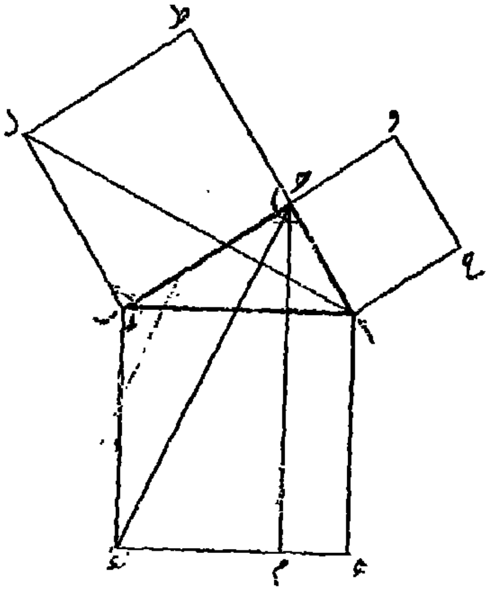
فاذا أضيف الى هذه الأقسام المربع المنشأ على الضلع ا ح كونت أجزاء المربع المنشأ على الوتر ا ب كما هو مبين فى الشكل بالأرقام

ومن هذا يرى أن المربع المنشأ على وتر القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين

ويلى هذه التمـارين البرهان النظرى لهذه النظرية

نظرية ٢٩

المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين



ليكن ا ب ح مثلثا قائم الزاوية فى ح

ويطلب البرهنة على أن المربع المنشأ على الوتر ا ب = مجموع المربعين المنشأين على الضلعين ب ح ، ح ا

لذلك ننشئ المربع ا ب ى ه على ا ب والمربع ب ح ط ل على ب ح والمربع ح ا ع و على ح ا

ثم نرسم من ح المستقيم ح م يوازى ب ى ، ا ه

ونصل ح ى ، ا ل

البرهان — من حيث ان كلا من الزاويتين ا ح ب ، ب ح ط قائمة

∴ المستقيم ح ط يكون على امتداد المستقيم ا ح ا

ومن حيث ان ∠ ا ب ى = ∠ ح ب ل بالقيام

∴ باضافة ∠ ا ب ح الى كل منهما

يحدث ان الزاوية الكلية ح ب ى = الزاوية الكلية ل ب ا

وفى المثلثين ح ب ى ، ل ب ا

من حيث ان
ح ب = ل ب
، ب ى = ب ا
والزاوية المحصورة ح ب ى = الزاوية المحصورة ل ب ا

∴ Δ حـ ب ء = Δ ل ب ا (نظرية ٤)

لكن المستطيل ب م يكافئ ضعف Δ حـ ب ء لأنه متحد معه فى القاعدة ب ء ومحصور معه بين المتوازيين ب ء ، حـ م

والمربع ب ط يكافئ ضعف Δ ل ب ا لأنه متحد معه فى القاعدة ب ل ومحصور معه بين المتوازيين ب ل ، ا ط

∴ المستطيل ب م يكافئ المربع ب ط

وكذا اذا وصلنا حـ هـ ، ب ع يحدث أن

المستطيل ا م يكافئ المربع ا و

∴ المربع الكلى ب هـ = مجموع المربعين ب ط ، ا و

أى ان المربع المنشأ على الوتر ا ب = مجموع المربعين المنشأين على الضلعين ب حـ ، حـ ا وهو المطلوب

ملاحظة — تعرف هذه النظرية بنظرية فيثاغورس وخلاصتها فيما يأتى

$$\overline{\text{ا ب}}^{2} = \overline{\text{ب حـ}}^{2} + \overline{\text{حـ ا}}^{2}$$

وبعبارة أخرى اذا دل الرمزان ا َ ، ب َ على طولى الضلعين المحصورة بينهما الزاوية القائمة حـ ، حـ َ على الوتر

كان $\text{حـ}'^{2} = \text{ا}'^{2} + \text{ب}'^{2}$

ومنه ينتج أن $\text{ا}'^{2} = \text{حـ}'^{2} - \text{ب}'^{2}$ ، $\text{ب}'^{2} = \text{حـ}'^{2} - \text{ا}'^{2}$

تنبيه ١ — يؤخذ مما تقدم أنه اذا فرض أن س نقطة تقاطع حـ م مع ا ب

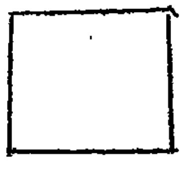
فان المربع ب ط يكافئ المستطيل ب م

أى أن $\overline{\text{ب حـ}}^{2}$ يكافئ المستطيل ب ا × ب س ... ... (١)

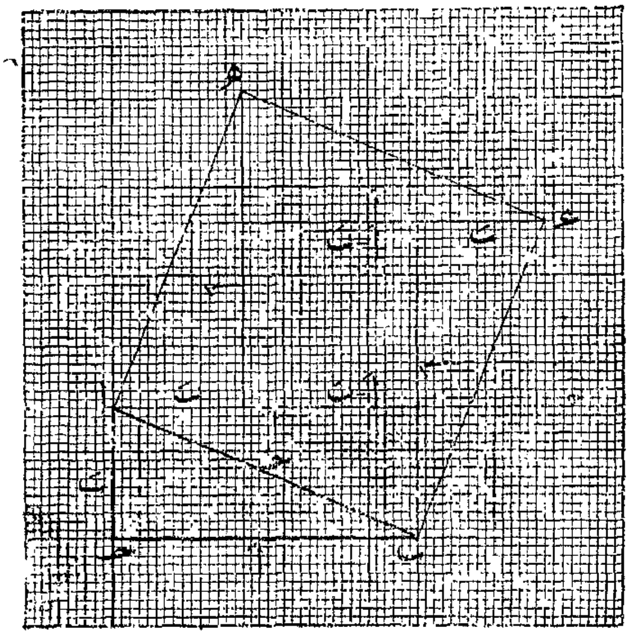
وكذلك المربع ا و يكافئ المستطيل ا م

أى أن $\overline{\text{ا حـ}}^{2}$ يكافئ المستطيل ا ب × ا س ... ... (٢)

تنبيه ٢ — من حيث انه يمكن البرهنة على أن المربعين المنشأين على ضلعين متساويين يتكافآن بذلك بواسطة انطباقهما كل على الآخر فانه يمكن الاستدلال على أن أضلاع المربعات المتكافئة متساوية



طريقة عملية للبرهنة على نظرية فيثاغورس



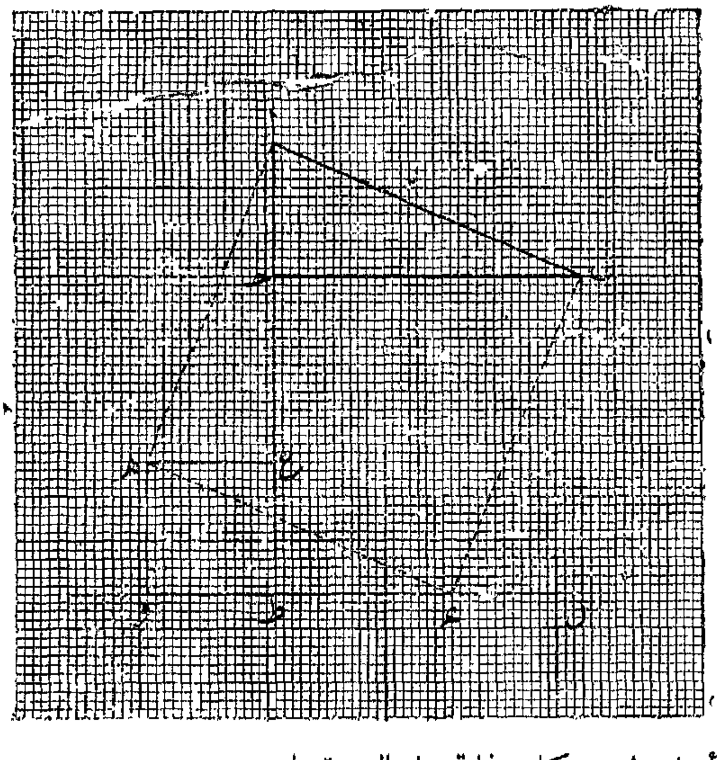
(أولا) نفرض أن ا ب ح المثلث القائم الزاوية المعلوم وأن ا ب ى هـ المربع المنشأ على الوتر ا ب فاذا رسم من رؤوس المربع المذكور مستقيمات موازية للضلعين ب ح ، ح ا حدث في الشكل أربعة مثلثات قائمة الزاوية كل منها ينطبق تمام الانطباق على المثلث المفروض ا ب ح

فاذا رمزنا بالحروف اَ ، بَ ، حَ لأضلاع المثلث كما تقدم يحدث أن المربع المنشأ على الوتر حَ = ٤ مثلثات قائمة الزاوية + المربع المتوسط المبين في الشكل أي أن

حَ٢ = ٤ × ½ × اَ × بَ + (اَ − بَ)

= ٢ × اَ × بَ + اَ − ٢ اَ × بَ + بَ

= اَ + ب



(ثانيا) نفرض أن ا ب ح المثلث القائم الزاوية المعلوم وأن ح ل المربع المنشأ على ب ح فاذا أخذ البعد ل ى = ط ع = ا ح ورسم المربع ع و بجانب المربع ح ل ثم وصل ب ى ، ا هـ نرى أن

∆ ب ل ى يمكن تطبيقه تماما على ∆ ا ع هـ ، ∆ هـ و ى ينطبق على ∆ ا ح ب وذلك نراه بقطع المثلثات وتطبيقها بعضها على بعض

وأن المربع و ع = المربع المنشأ على ا ح

وأن ا ب ى هـ المربع المنشأ على ا ب وكل هذا تسهل البرهنة عليه

فاذا تأملنا نرى أن ا ب ى هـ الذى هو المربع المنشأ على الوتر يساوى مجموع المربعين ح ل ، ع و المنشأين على الضلعين الآخرين

تمـارين

(عددية وتخطيطية)

١ المطلوب رسم المثلث ا ب حـ القائم الزاوية فى حـ مع العلم

(أولا) بأن اَ = ٣ سنتيمترات ، بَ = ٤ سنتيمترات

(ثانيا) ا = ٢٫٥ من السنتيمترات ، بَ = ٦ سنتيمترات

(ثالثا) اَ = ٣٫١ « « ، بَ = ٨٫٧ من السنتيمترات

أوجد مقدار طول الوتر فى كل حالة وحقق ذلك بالقياس

٢ المطلوب رسم المثلث ا ب حـ القائم الزاوية فى حـ مع العلم

(أولا) بأن حـَ = ٨٫٥ من السنتيمترات ، اَ = ٧٫٥ من السنتيمترات(راجع عملية ١٠)

(ثانيا) حـَ = ٥٫٣ « « ، ب = ٤٫٥ « «

اوجد مقدار الضلع الثالث للثلث فى كل حالة مع تحقيق ذلك بالقياس

(المطلوب حل المسائل الآتيـة واستخراج المقادير المطلوبة بالحساب مع وضع الرسم اللازم وتحقيق المقادير الناتجة بالقيـاس)

٣ ماطول سلم طرفه الأعلى على شباك يبعد عن الأرض ٤٠ مترا وطرفه الأسفل يبعد عن الحـائط ٩ أمتار

٤ سارت سفينة من نقطة معينة متجهة نحو الجنوب ٣٣ كيلو مترا ثم اتجهت نحو الغرب ٥٦ كيلومترا فـا مقدار بعدها عن النقطة الأولى

٥ سفينتان احداهما فى الجهة الشـالية الشرقية من نقطة معلومة والأخرى فى الجهة الشمالية الغربية منها وتبعد الأولى عن هذه النقطة ٦ كيلومترات والثانية ١٫١ من الكيلومترات ما طول المسافة بين السفينتين

٦ سـلم طوله ٦٥ قدما مرتكز على حائط ونقطة ارتكاز طرفه الأعلى تبعد عن الأرض ٦٣ قدما ماطول المسافة بين الحائط وطرفه الأسفل

٧ اذا فرضت النقطة ب شرقى ا ونقطة حـ جنوبى ب على مسافة ٥٥ مترا منها وكان ا حـ = ٧٣ مترا فـا طول ا ب

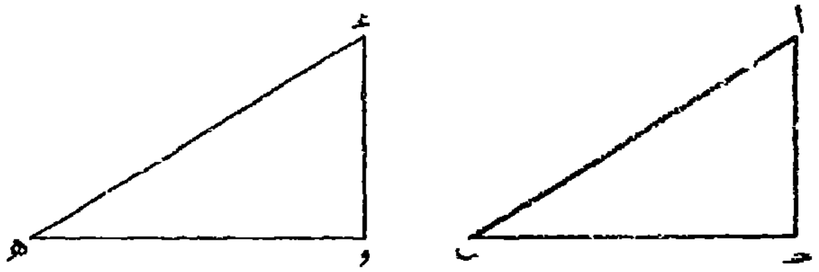
٨ سار رجل ٢٧ كيلومترا متجها نحو الجنوب ثم اتجه غربا وسار ٢٤ كيلومترا ثم شمالا وسار ٢٠ كيلومترا مابعده عن نقطة مسيره الأولى

٩ سار رجل من نقطة متجها نحو الغرب مسافة ٢٥ مترا ثم اتجه شمالا وسار ٦٠ مترا ثم شرقا وسار ٨٠ مترا ثم جنوبا وسار ١٢ مترا مابعده عن نقطة مسيره الأولى

١٠ سلم طوله ١٠ أمتار مرتكز على شباك يبعد عن الأرض ٩٫٦ من الأمتار ولو مال حتى ارتكز على حائط فى الجهة الأخرى من الشارع بدون أن تتغير نقطة ارتكازه على الأرض لبعدت نقطة ارتكازه على هذا الحائط عن الأرض ٢٫٨ من الأمتار ماعرض الشارع

نظرية ٣٠

اذا كان المربع المنشأ على أحد أضلاع مثلث يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة



نفرض أن ا حـ ب مثلث وأن

المربع المنشأ على ا ب = مجموع المربعين المنشأين على ب حـ ٦ حـ ا

ويطلب إثبات أن ∠ ا حـ ب قائمة

لذلك نرسم المستقيم هـ و = ب حـ

ونقيم على هـ و من النقطة و العمود و ى = حـ ا

ثم نصل هـ ى

البرهان — من حيث ان هـ و = ب حـ

∴ المربع المنشأ على هـ و = المربع المنشأ على ب حـ

ومن حيث ان و ى = حـ ا

∴ المربع المنشأ على و ى = المربع المنشأ على حـ ا

ومنـــه ينتج أن مجموع المربعين المنشأين على هـ و ٦ و ى = مجموع المربعين المنشأين على ب حـ ٦ حـ ا

ومن حيث ان ∠ هـ و ى قائمة

∴ مجموع المربعين المنشأين على هـ و ٦ و ى = المربع المنشأ على ى هـ (نظرية ٢٩)

ولكن مجموع المربعين المنشأين على ب حـ ٦ حـ ا = المربع المنشأ على ا ب بالفرض

∴ المربع المنشأ على ى هـ = المربع المنشأ على ا ب

∴ ى هـ = ا ب

وفى المثلثين ا حـ ب ٦ ى و هـ

من حيث ان { ا حـ = ى و ٦ حـ ب = و هـ ٦ ا ب = ى هـ }

∴ ∠ ا حـ ب = ∠ ى و هـ (نظرية ٧)

لكن ∠ ى و هـ قائمة بالعمل

∴ ∠ ا حـ ب قائمة وهو المطلوب

تمـارين على نظريتى ٢٩ و ٣٠

(مسائل نظرية)

١ برهن على أن المربع المنشأ على قطر المربع يساوى ضعف هذا المربع

٢ ا ب حـ مثلث انزل من ا العمود ا د على القاعدة ب حـ فاذا كان الضلع حـَ أكبر من الضلع بَ كان $\text{حـَ}^2 - \text{بَ}^2 = \overline{\text{ب د}}^2 - \overline{\text{د حـ}}^2$

٣ اذا فرضت نقطة م داخل المثلث ا ب حـ وانزل منها على أضـلاعه الأعمدة م س على ب حـ ، م ص على حـ ا ، م ع على ا ب حدث أن

$$\overline{\text{ا ع}}^2 + \overline{\text{ب س}}^2 + \overline{\text{حـ ص}}^2 = \overline{\text{ا ص}}^2 + \overline{\text{حـ س}}^2 + \overline{\text{ب ع}}^2$$

٤ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ا رسمنـا مستقيما س ص قاطعا ا ب فى س ، ا حـ فى ص ثم وصلنا حـ س ، ب ص برهن على أن

$$\overline{\text{حـ س}}^2 + \overline{\text{ب ص}}^2 = \overline{\text{ب حـ}}^2 + \overline{\text{س ص}}^2$$

٥ فى المثلث القائم الزاوية ٤ أمثال مجموع مربعى المستقيمين المتوسطين المرسومين من زاويتيه الحادتين تساوى ٥ أمثال مربع الوتر

٦ ارسم مربعا يساوى مجموع مربعين معلومين

٧ ارسم مربعا يساوى الفرق بين مربعين معلومين

٨ المطلوب تقسيم مستقيم الى قسمين بحيث يكون مربع أحدهما ضعف مربع الآخر

٩ المطلوب تقسيم مستقيم الى قسمين بحيث يكون مجموع مربعيهما مساويا مربعا معلوما

(عددية وتخطيطية)

١٠ أى المثلثات الآتية قائم الزاوية

(١) اَ = ١٤ سنتيمترا ، بَ = ٤٨ سـنتيمترا ، حـَ = ٥٠ سنتيمترا

(٢) اَ = ٤٠ سنتيمترا ، بَ = ١٠ سنتيمترات ، حـَ = ٤١ سنتيمترا

(٣) اَ = ٢٠ سنتيمترا ، بَ = ٩٩ سـنتيمترا ، حـَ = ١٠١ سنتيمتر

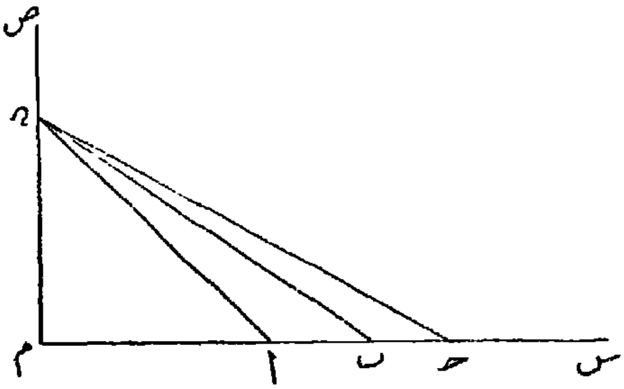
١١ ا ب حـ مثلث متساوى الساقين وقائم الزاوية فى حـ والمطلوب استخراج النتيجة الآتية من نظرية ٢٩ وهى $\overline{\text{ا ب}}^2 = ٢\ \overline{\text{ا حـ}}^2$

وايضاح هذا الناتج بواسطة توصيل قطرى المربع المنشأ على ا ب وأحد قطرى المربع المنشأ على ا حـ واذا كان ا حـ = ب حـ = ٥ سنتيمترات فمـا طول ا ب الى أقرب مليمتر . حقق النـاتج بوضع رسم وقياس ا ب

١٢ ارسم مربعـا طول قطره ٦ سـنتيمترات واحسب طول ضلعـه مع تحقيق ذلك بالقيـاس ثم اوجد المساحة

عملية ١٦

المطلوب رسم المربع الذى مساحته ضعف مساحة مربع معلوم أو ثلاثة أمثاله أو أربعة أمثاله وهكذا ثم ايجاد المقادير التقريبية لكل من $\sqrt{\text{٢}}$ ، $\sqrt{\text{٣}}$ ، $\sqrt{\text{٤}}$ ، $\sqrt{\text{٥}}$ الخ بطريقة تخطيطية



لذلك نرسم المستقيمين المتعامدين م س ، م ص ونأخذ على م س البعد م ا يساوى وحدة ما من وحدات الأطوال وعلى م ص البعد م ه يساوى هذه الوحدة ونصل ه ا

فيكون $\overline{\text{ه ا}}^{2} = \overline{\text{م ه}}^{2} + \overline{\text{م ا}}^{2} = \text{١} + \text{١} = \text{٢}$

∴ $\text{ه ا} = \sqrt{\text{٢}}$

ولايجاد المقدار $\sqrt{\text{٣}}$

تأخذ على م س البعد م ب = ه ا ونصل ه ب

فيحدث أن $\overline{\text{ه ب}}^{2} = \overline{\text{م ه}}^{2} + \overline{\text{م ب}}^{2} = \text{١} + \text{٢} = \text{٣}$

∴ $\text{ه ب} = \sqrt{\text{٣}}$

ولايجاد المقدار $\sqrt{\text{٤}}$

تأخذ على م س البعد م حـ = ه ب ونصل ه حـ

فيحدث أن $\overline{\text{ه حـ}}^{2} = \overline{\text{م ه}}^{2} + \overline{\text{م حـ}}^{2} = \text{١} + \text{٣} = \text{٤}$

∴ $\text{ه حـ} = \sqrt{\text{٤}}$

وبقياس كل من الأبعاد ه ا ، ه ب ، ه حـ بغاية الدقة نصل إلى معرفة المقادير $\sqrt{\text{٢}}$ ، $\sqrt{\text{٣}}$ ، $\sqrt{\text{٤}}$ وبالسير فى العمل على هذا النمط نوجد كلا من المقادير $\sqrt{\text{٥}}$ ، $\sqrt{\text{٦}}$ ، $\sqrt{\text{٧}}$ وهكذا

(تابع التمارين على نظريتى ٢٩ ، ٣٠)

١٣ برهن على القانون

قطر المربع = ضلعه × $\sqrt{\text{٢}}$

ثم أوجد لأقرب سنتيمتر طول قطر المربع الذى طول ضلعه ٥٠ مترا وضع شكلا لذلك مقياس الرسم فيه سنتيمتر واحد لكل ١٠ أمتار واستخرج الناتج المتقدم بواسطة قياس القطر

١٤ ا ب ح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢ م (من وحدات مّا) وطول العمود النـازل من أحد الرؤوس على القاعدة يساوى ع برهن على أن

$$ع = م\sqrt{٣}$$

وحقق هذا الناتج برسم المثلث اذا كان طول ضلعه ٨ سنتيمترات

١٥ ا ب ح مثلث فيه الضلع اَ $=$ م^{٢} $-$ ن^{٢} ، بَ $=$ ٢ م ن ، حَ $=$ م^{٢} $+$ ن^{٢}

برهن بالجبر على أن حَ^{٢} $=$ اَ^{٢} $+$ بَ^{٢}

واذا أطلق لكل من م ، ن مقادير عددية مختلفة فانه يطلب ايجاد المقـدار الدال على طول كل من أضلاع المثلث القائم الزاوية فى كل حالة

١٦ ا ب ح مثلث أنزلنا من ا العمود ا ء على القاعدة ب ح فاذا رمزنا لطول هـذا العمود بالحرف ع وكان

(أولا) اَ $=$ ٢٥ سنتيمترا ، ع $=$ ١٢ سنتيمترا ، ب ء $=$ ٩ سنتيمترات فانه يطلب ايجاد طول كل من الضلعين بَ ، حَ

(ثانيا) بَ $=$ ٤١ ديسيمترا ، حَ $=$ ٥٠ ديسيمترا ، ب ء $=$ ٣٠ ديسيمترا فانه يطلب ايجاد طول كل من العمود ع والضلع اَ واثبـات أن

$$\sqrt{بَ^{٢} - ع^{٢}} + \sqrt{حَ^{٢} - ع^{٢}} = اَ$$

١٧ ا ب ح مثلث ، ا ء عمود على ب ح ويراد إثبات أن

$$حَ^{٢} - \overline{ب ء}^{٢} = بَ^{٢} - \overline{ح ء}^{٢}$$

واذا كان اَ $=$ ٥١ سنتيمترا ، بَ $=$ ٢٠ سنتيمترا ، حَ $=$ ٣٧ سنتيمترا فما طول كل من ب ء ، ا ء وما مساحة المثلث ا ب ح

١٨ استعمل طريقة المسألة المتقدمة فى ايجاد مساحات المثلثات التى أطوال أضلاع كل منها كما يأتى

(أولا) اَ $=$ ١٧ سنتيمترا ، بَ $=$ ١٠ سنتيمترات ، حَ $=$ ٩ سنتيمترات

(ثانيا) اَ $=$ ٢٥ مـترا ، بَ $=$ ١٧ مـترا ، حَ $=$ ١٢ مـترا

(ثالثا) اَ $=$ ٤١ سنتيمترا ، بَ $=$ ٢٨ سنتيمترا ، حَ $=$ ١٥ سنتيمترا

(رابعا) اَ $=$ ٤٠ ياردة ، بَ $=$ ٣٧ ياردة ، حَ $=$ ١٣ ياردة

١٩ المسطرتان م س ، م ص متعامدتان تنزلق عليهما مسطرة ثالثة ا ب فاذا كان فى أحد أوضاعها م ا = ٥٫٦ من السنتيمترات ، م ب = ٣٫٣ من السنتيمترات وفى وضع آخر م ا = ٤ سنتيمترات فأوجد طول م ب بقياسه بعد وضع رسم لذلك واستخرج هذا الطول أيضا بالحساب

٢٠ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ ، ع طول العمود النازل من حـ على ا ب برهن على أنه باستخراج مساحة المثلث بطريقتين يحدث أن

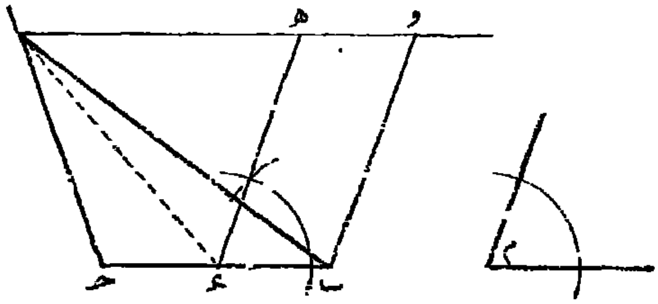
$$ع \times \bar{حـ} = \bar{ا} \times \bar{ب}$$

ومن ذلك استنتج أن $\frac{1}{ع^2} = \frac{1}{\bar{ا}^2} + \frac{1}{\bar{ب}^2}$

دعاوى عملية على المساحات

عمليـــة ١٧

المطلوب رسم متوازى الأضلاع الذى يكافئ مثلثا معلوما بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



نفرض أن ا ب حـ المثلث المعلوم ، م الزاوية المعلومة

والمطلوب رسم متوازى الأضلاع الذى يكافئ ∆ ا ب حـ بحيث تكون احدى زواياه تساوى ∠ م

العمل — ننصف ب حـ فى ى ونمد منها المستقيم ى هـ يصنع مع ب ى زاوية ب ى هـ = ∠ م

ونرسم من ا المستقيم ا هـ و يوازى حـ ب

ومن ب المستقيم ب و يوازى ى هـ

فيكون ب ى هـ و متوازى الأضلاع المطلوب

البرهان — نصل ا ى

من حيث ان ∆ ا حـ ى ، ∆ ا ب ى متحدان فى الارتفاع ومرسومان على القاعدتين المتساويتين حـ ى ، ى ب

∴ ∆ ا حـ ى يكافئ ∆ ا ب ى

∴ ∆ ا ب حـ ضعف ∆ ا ب ى

ومن حيث ان ب ى هـ و متوازى الأضلاع بالعمل ويساوى ضعف ∆ ا ب ى لأنهما متحدان فى القاعدة ب ى ومحصوران بين المتوازيين ب ى ، و ا

∴ متوازى الأضلاع ب ى هـ و يكافئ ضعف ∆ ا ب ى أى يكافئ ∆ ا ب حـ

ومن حيث ان احدى زوايا متوازى الأضلاع المذكور وهى ب ى هـ = الزاوية المعلومة م

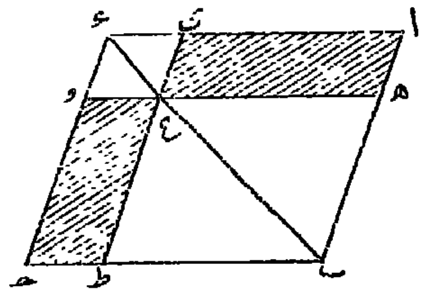
متوازى الأضلاع المطلوب رسمه هو ب ى هـ و

تمارين

(تخطيطية)

١ ارسم مربعا طول ضلعه ٥ سنتيمترات وارسم على ضلعه متوازى الأضلاع الذى يكافئه واحدى زواياه تساوى ٤٥° واوجد طول أحد ضلعيه المائلين بالحساب وبالقياس

٢ ارسم متوازى الأضلاع ا ب حـ ء الذى طول ضلعه اب = ٦ سنتيمترات ، اء = ٥ سنتيمترات ثم ارسم على القاعدة ا ب معينا يكافئ متوازى الأضلاع المذكور



تعريف — فى أى شكل متوازى الأضلاع مثل ا ب حـ ء اذا فرضت نقطة ما مثل ع على أحد قطريه ب ء ومر بها مستقيمان هـ و ، ط ى بحيث يوازى كل ضلعين فان الشكل ينقسم الى أربعة أشكال متوازية الأضلاع و ى ، ط هـ ، و ط ، ى هـ ويقال ان الأولين مرسومان على القطر ب ء والآخرين المتممان لمتوازيى الأضلاع المرسومين على القطر المذكور

٣ فى شكل التعريف المتقدّم برهن بنظرية ٢١ على أن المتممين هـ ى ، ط و متكافئان واذا فرض أن ط و شكل متوازى الأضلاع معلوم وأن ع ى مستقيم معلوم فانه يطلب رسم شكل متوازى الأضلاع على ع ى يكافئ متوازى الأضلاع المعلوم وتكون زواياه مساوية لزوايا هذا المعلوم

٤ المطلوب رسم مستطيل يكافئ آخر معلوما مثل حـ ء هـ و على شرط أن يكون أحد أضلاعه مساويا طولا معلوما ا ب

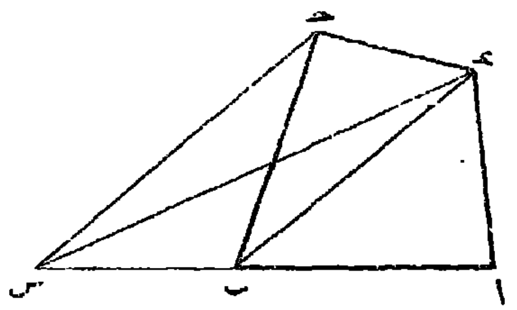
واذا كان ا ب = ٦ سنتيمترات ، حـ ء = ٨ سنتيمترات ، حـ و = ٣ سنتيمترات فانه يطلب ايجاد طول الضلع الثانى للمستطيل بالقياس

٥ ا ب حـ ء متوازى الأضلاع الذى طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات ، ا ء = ٤,٥ من السنتيمترات ، ∠ ا = ٥٥° والمطلوب رسم شكل آخر متوازى الأضلاع مساو للأول فى الزوايا ومكافئ له وطول أكبر أضلاعه ٧,٥ من السنتيمترات ثم قياس الضلع الأصغر واذا تغير مقدار الزاوية ا فارسم متوازى الأضلاع بالشروط السالفة مقارنا الحالتين ومستخلصا نتيجة من هذه المقارنة

٦ المطلوب رسم مستطيل على ضلع طوله ٥ سنتيمترات يكافئ مثلثا متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سنتيمترات ثم ايجاد طول الضلع الثانى للمستطيل بالقياس ومساحته على وجه التقريب بالحساب

عملية ١٨

المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلا رباعيا معلوما



نفرض أن ا ب حـ ء الشكل الرباعى المعلوم

والمطلوب رسم مثلث يكافئ هذا الشكل

العمل — نصل ب ء

ونرسم من حـ المستقيم حـ س يوازى ب ء ويقابل امتداد ا ب فى س

نصل س ء

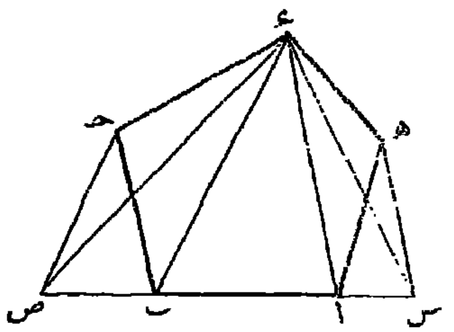
فيكون ء ا س هو المثلث المطلوب

البرهان — من حيث ان المثلثين س ء ب ، حـ ء ب على قاعدة واحدة وهى ب ء وبين المتوازيين ب ء ، حـ س

∴ Δ س ء ب = Δ حـ ء ب

وباضافة Δ ا ب ء الى كل من طرفى هذه المتساوية يحدث أن Δ ء ا س = الشكل ا ب حـ ء

نتيجة — يؤخذ مما تقدم أنه يمكن تحويل أى شكل كثير الأضلاع الى آخر يكافئه يكون عدد رؤوسه أقل بواحد من عدد رؤوس الأول وبهذه الواسطة يمكن تحويل أى شكل كثير الأضلاع الى مثلث يكافئه

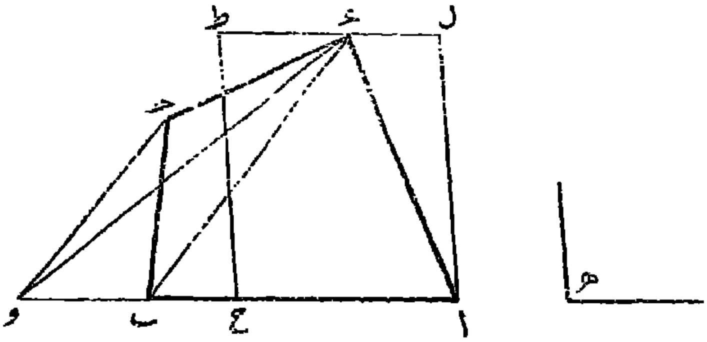


فمثلا الشكل الخماسى ا ب حـ ء هـ يكافئ الشكل الرباعى حـ ء س ب

والشكل الرباعى حـ ء س ب يمكن تحويله الى المثلث ء س ص المكافئ له

عملية ١٩

المطلوب رسم شكل متوازى الاضلاع يكافئ شكلا كثير الأضلاع معلوما بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



نفرض أن ا ب حـ ء كثير الأضلاع المعلوم ﻫ الزاوية المعلومة

والمطلوب رسم متوازى الأضلاع الذى يكافئ ا ب حـ ء بحيث تكون احدى زواياه مساوية ∠ هـ

العمل — نصل ب ء

ونرسم من حـ المستقيم حـ و يوازى ب ء ويقابل امتداد ا ب فى و ثم نصل ء و

فالمثلث ء ا و = الشكل ا ب حـ ء (عملية ١٨)

ثم نرسم متوازى الأضلاع ا ع ط ل يكافئ △ ء ا و وتكون فيه ∠ ا ع ط مساوية ∠ هـ (عملية ١٧)

فيكون متوازى الأضلاع ع ل = △ ء ا و

= الشكل ا ب حـ ء

واحدى زواياه ا ع ط = ∠ هـ

تنبيه — اذا كان عدد رؤوس كثير الأضلاع المعلوم أكثر من أربعة فانه يجب أن يحول الى آخر ينقص عنه واحدا فى عدد الرؤوس ثم هذا الى آخر كذلك وهكذا حتى يتحول الشكل المعلوم الى مثلث مكافئ له

تمارين على تحويل كثير الأضلاع الى مثلث مكافئ له

١ ارسم شكلا رباعيا مثل ا ب حـ ء فيه ا ب = ب حـ = ٥,٥ من السنتيمترات ، حـ ء = ء ا = ٤,٥ من السنتيمترات ، ــ ا = ٧٥°
ثم حول الشكل الى مثلث يكافئه وقس قاعدته وارتفاعه ثم أوجد مساحة الشكل الرباعى بالتقريب

٢ ارسم شكلا رباعيا مثل ا ب حـ ء فيه ا ب = ٥,٦ من السنتيمترات ، ب حـ = ٦,٤ من السنتيمترات ، حـ ء = ٦,٦ من السنتيمترات ، ء ا = ٧,٢ من السنتيمترات والقطر ب ء = ٦ سنتيمترات ثم حول الشكل الى مثلث يكافئه وأوجد من ذلك المساحة التقريبية للشكل

٣ ارسم مخمسا متساوى الأضلاع على شرط أن يكون طول قاعدته ا ب = ٤ سنتيمترات وكل من زاويتيه ا ، ب تساوى ١٠٨° ثم حول المخمس المذكور الى مثلث يكافئه وقس قاعدته وارتفاعه ومن ذلك أوجد المساحة التقريبية للمخمس

٤ ا ب حـ ء مزرعة على هيئة شكل رباعى طول ضلعه ا ب = ٤٥٠ مترا ، ب حـ = ٣٨٠ مترا ، حـ ء = ٣٣٠ مترا ، ا ء = ٣٩٠ مترا وقطره ا حـ = ٦٦٠ مترا والمطلوب رسم الشكل المذكور (بمقياس سنتيمتر لكل ٥٠ مترا) ثم تحويله الى مثلث يكافئه وايجاد مساحته بعد قياس قاعدة المثلث وارتفاعه

(مسائل عمليـة)

(اذكر حل كل مسألة مع البرهان)

٥ ا ب حـ مثلث ، ء نقطة مفروضة على قاعدته ب حـ أو على امتدادها والمطلوب رسم مثلث يكافئ المثلث ا ب حـ على شرط أن تكون قاعدته ب ء

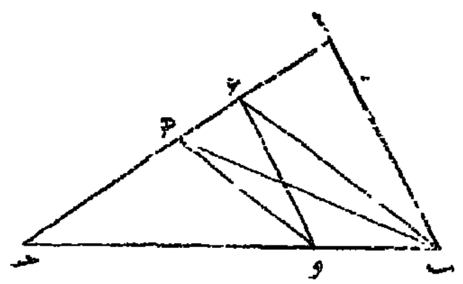
٦ ارسم مثلثا ذا ارتفاع معلوم يكافئ مثلثا آخر

٧ ا ب حـ مثلث ، س نقطة ما والمطلوب رسم مثلث يكافئ المثلث ا ب حـ على شرط أن تكون س رأسا له وأن تكون قاعدته على استقامة ب حـ

٨ ا ب حـ ء شكل رباعى ، س نقطة ما مفروضة على ء حـ والمطلوب تحويل الشكل ا ب حـ ء الى مثلث يكافئه على شرط أن تكون س رأسا له وأن تكون قاعدته على استقامة ا ب

٩ بين كيفية تقسيم المثلث الى أجزاء متكافئة عددها ن بمد مستقيمات من احد رؤوسه

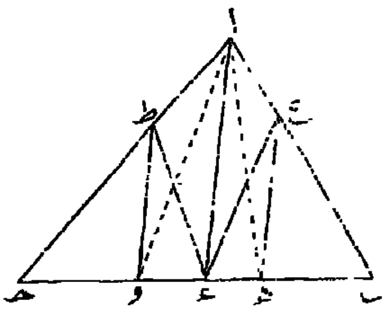
١٠ نصف مثلثا معلوما بمستقيم يمر بنقطة مفروضة على أحد أضلاعه



[لذلك نفرض أن ا ب حـ المثلث المعلوم ، د النقطة المفروضة على أحد الأضلاع وليكن ا حـ فننصف هذا الضلع فى نقطة هـ ونصل ب د ، ب هـ ونرسم من هـ المستقيم هـ و يوازى ب د ونصل د و فيكون هذا المستقيم هو المنصف المطلوب]

١١ المطلوب تقسيم مثلث معلوم الى ثلاثة أجزاء متكافئة بمستقيمين يمران بنقطة مفروضة على احد أضلاعه

[لذلك نفرض أن ا ب حـ المثلث المعلوم ، د النقطة المفروضة على احد الأضلاع وليكن ب حـ



فنقسم ب حـ الى ثلاثة أقسام متساوية بالنقطتين هـ ، و (عملية ٧)
ثم نصل ا د ونرسم هـ ح ، و ط يوازيان ا د ونصل د ح ، د ط
فيقسم د ح ، د ط المثلث الى ثلاثة أقسام متكافئة
وللبرهنة على ذلك نصل اهـ ، ا و]

١٢ المعلوم مثلث ونقطة مفروضة على أحد أضلاعه والمطلوب رسم مستقيم من هذه النقطة يقطع من المثلث جزأ يكافئ ربعه أو خمسه أو سدسه أو أى كسر آخر منه

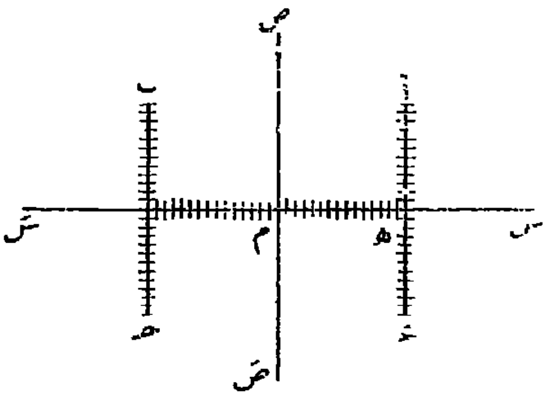
١٣ المعلوم شكل رباعى والمطلوب رسم مستقيم ينصف الشكل المذكور ويمر بأحد رؤوسه
(لذلك نحول الشكل الرباعى الى مثلث يكافئه ثم ننصف قاعدة المثلث ونصل رأسه بمنتصف القاعدة فينصف هذا المستقيم الشكل الرباعى المعلوم)

١٤ المعلوم شكل رباعى والمطلوب ايجاد ربعه أو خمسه أو سدسه أو أى كسر آخر منه برسم مستقيم من أحد رؤوسه

المحوران الاحداثيان والبعدان الاحداثيان

يتعين وضع أى نقطة بالنسبة الى مستقيمين متقاطعين أحدهما عمودى على الآخر متى علم بعدا هذه النقطة عن هذين المستقيمين

فاذا تقاطع مستقيمان س سَ ، ص صَ فى م وكانا متعامدين وعلم بعد النقطة ا مثلا عن س سَ وبعدها عن ص صَ تعين وضع هذه النقطة بالنسبة الى س سَ ، ص صَ



ويسمى كل من المستقيمين س سَ ، ص صَ بمحور الاحداث ونقطة تقاطعهما م بنقطة الأصل

ويعرف المحور س س بمحور السينات والمحور ص ص بمحور الصادات

ويرسم عادة محور السينات أفقيا ومحور الصادات رأسيا

فاذا فرضت نقطة مثل ا وأريد تعيين بعديها عن س سَ ، ص صَ أنزل منها العمود ا هـ على م س وطول هذا العمود يدل على بعد النقطة ا عن المحور س سَ وطول م هـ يدل على بعدها عن المحور ص صَ

ويرمز لبعد أى نقطة مثل ا عن محور الصادات بالرمز سـ

ويرمز لبعدها عن محور السينات بالرمز صـ

ويقال لهذين البعدين معا البعدان الاحداثيان للنقطة ويرمز لها هكذا (سـ ، صـ)

فمثلا اذا أريد تعيين وضع نقطة بعداها الاحداثيان (١٥ ، ١٢) نجرى العمل هكذا

نركز فى م ونأخذ على م س البعد م هـ = ١٥ وحده

ونقيم من هـ عمودا على م س ونأخذ عليه البعد هـ ا = ١٢ وحده

فتكون ا هى النقطة التى بعداها الاحداثيان (١٥ ، ١٢)

والمحوران الاحداثيان يقسمان مستوى الرسم الى أربعة أقسام هى س م ص ، ص م سَ ، سَ م صَ ، صَ م س وتعرف هذه الأقسام على ترتيبها المذكور بالربع الأول والثانى والثالث والرابع

ومن حيث انه يمكن أن توجد فى كل ربع من الأرباع المذكورة نقطة بعداها الاحداثيان مساويان للبعدين الاحداثيين للنقطة ا أى ١٥ وحده ، ١٢ وحده يلزم لمعرفة ما اذا كانت النقطة المراد تعيينها

واقعة فى الربع الأول أو الثانى او الثالث أو الرابع استعمال الاشارات الجبرية الموجبة والسالبة على النسق الآتى

تعتبر الأبعاد المأخوذة على محور السينات من يمين نقطة الأصل موجبة

وتعتبر الأبعاد المأخوذة على هذا المحور من يسار نقطة الأصل سالبة وتسبق بعلامة —

وتعتبر الأبعاد المأخوذة على محور الصادات موجبة ان كانت فوق محور السينات بأن كانت فى الربعين الأول أو الثانى

وسالبة وتسبق بعلامة — ان كانت تحت هذا المحور بأن كانت فى الربعين الثالث أو الرابع

وعلى ذلك فالبعدان الاحداثيان للنقطة ب هما (— ١٥ ، ١٢)

» » » » ح » (— ١٥ ، — ١٢)

» » » » ء » (١٥ ، — ١٢)

ملاحظة — البعدان الاحداثيان لنقطة الأصل م هما (٠ ، ٠)

وللسهولة فى الأعمال التطبيقية يستعمل الورق المنقسم الى مربعات صغيرة فيرسم محوران متعامدان متقاطعان فى نقطة تعتبر أنها الأصل ويؤخذ طول كل قسم أو أكثر وحدة للطول

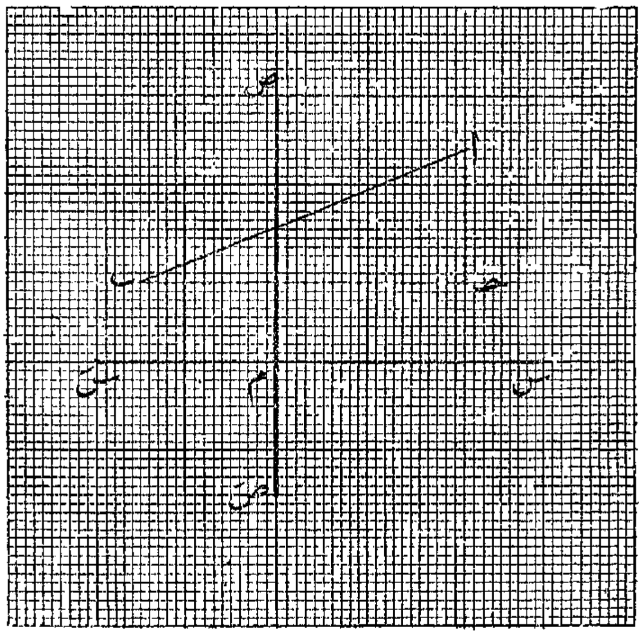
والورق المستعمل فى الأمثلة الآتية منقسم الى مربعات طول ضلع كل منها مليمتر

وللتطبيق على ما تقدّم نضرب الأمثلة الآتية

المثال الأوّل — البعدان الاحداثيان للنقطة ا هما (٢١ ، ٢٤) وللنقطة ب هما (— ١٥ ، ٩) والمطلوب تعيين هاتين النقطتين وايجاد البعد بينهما

لذلك طريقتان

الأولى — يعين موضع كل من النقطتين المذكورتين كما هو واضح من الشكل ثم يقاس البعد ا ب



والثانية — يعين وضع النقطتين كما تقدّم ثم يرسم من ب مستقيم يوازى س سَ ويمدّ حتى يقابل العمود النازل من ا على محور السينات فى ح

فيحدث أن △ ا ب ح قائم الزاوية فى ح وفيه ب ح = ٣٦ ، ا ح = ١٥

ومن حيث ان $\overline{اب}^٢ = \overline{بح}^٢ + \overline{اح}^٢$

∴ $\overline{اب}^٢ = \overline{٣٦}^٢ + \overline{١٥}^٢$

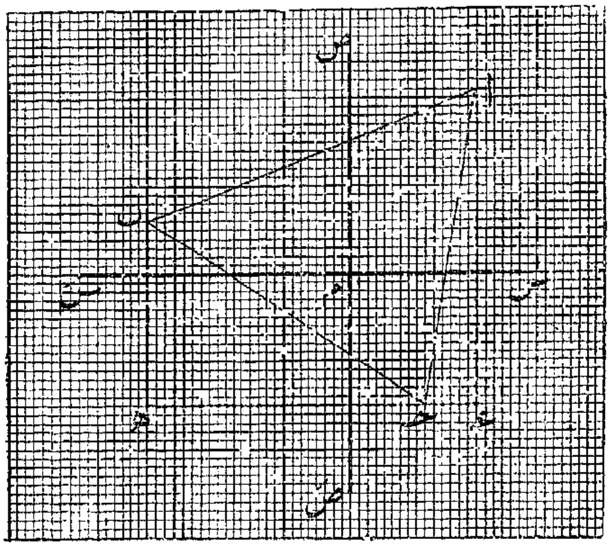
$= ١٢٩٦ + ٢٢٥$

$= ١٥٢١$

∴ ا ب = ٣٩

المثال الثاني — البعدان الاحداثيان لكل من النقط ا ، ب ، ح هما (١٥ ، ٢١) ، (— ٢٤ ، ٦) ، (٩ ، — ١٥) والمطلوب تعيين هذه النقط الثلاث وايجاد مساحة المثلث الحادث من توصيلها لذلك طريقتان أيضا

الأولى — انه بعد تعيين كل من النقط المذكورة كما هو واضح من الشكل نقيس ا ب وننزل عليه من ح ارتفاع المثلث ونقيسه ثم نستخرج من ذلك مساحة المثلث التقريبية



والثانية — أن نرسم من ا ، ب المستقيمين ا ى ، ب هـ يوازيان ص صَ

ثم نرسم المستقيم ى هـ مارا بنقطة ح وموازيا س سَ

فيحدث أن Δ ا ب ح = شبه المنحرف ا ى هـ ب مطروحا منه المثلثان القائمـا الزاوية (ا ى ح ، ب هـ ح)

أي أن Δ ا ب ح $= \frac{1}{2}$ ى هـ (ا ى + ب هـ) — $\frac{1}{2}$ ا ى × ى ح — $\frac{1}{2}$ ب هـ × هـ ح

$= \frac{1}{2} \times$ ٣٩ × ٥٧ — $\frac{1}{2} \times$ ٣٦ × ٦ — $\frac{1}{2} \times$ ٢١ × ٣٣

= ٦٥٧ وحدة مربعة

تمارين على ورق المربعات

١ عين كلا من النقط المبينة احداثياتها فى المجاميع الآتية

أولا (١٨ ، ١٢) و (—١٨ ، ١٢) و (—١٨ ، —١٢) و (١٨ ، —١٢)

ثانيا (٢٤ ، ٠) و (٠ ، ٢٤) و (—٢٤ ، ٠) و (٠ ، —٢٤)

ثالثا (٣٦ ، ١٥) و (١٥ ، ٣٦) و (—٣٦ ، ١٥) و (—١٥ ، ٣٦)

٢ عين النقط التى احداثياتها كالآتى وبين بطريقة عمليــة أن النقط فى كل مجموعة على استقامة واحدة ثم برهن على ذلك نظريا

أولا (٢٧ ، ٢١) و (٠ ، ٠) و (—٢٧ ، —٢١)

ثانيا (—٢٧ ، ٢١) و (٠ ، ٠) و (٢٧ ، —٢١)

٣ عين نقطتى كل مجموعة من المجموعتين الآتيتين

أولا (١٢ ، ٩) و (٣٦ ، ٢١)

ثانيا (١٥ ، ١٢) و (٤٥ ، ٤٨)

ثم صل بين نقطتى كل مجموعة بمستقيم وقس البعدين الاحداثيين لنقطة منتصفه وبين السبب فى أن البعد الأفقى لنقطة التنصيف المذكورة يساوى نصف مجموع البعدين الافقيين للنقطتين الواصل بينهما المستقيم الذى نصف وأن البعد الرأسى لهذه النقطة يساوى نصف مجموع البعدين الرأسيين للنقطتين المذكورتين

٤ عين نقطتى كل مجموعة وصل بينهما بمستقيم وأوجد البعدين الاحداثيين لنقطة منتصفه

أولا (٠ ، ٠) و (٢٤ ، ٣٠)

ثانيا (٢٤ ، ٠) و (٠ ، ٣٠)

ثالثا (٠ ، ٠) و (—٢٤ ، —٣٠)

رابعا (—٢٤ ، ٠) و (٠ ، —٣٠)

٥ المطلوب تقسيم المستقيم الواصل بين (٠ ، ٠) و (٥٤ ، ٤٥) الى ثلاثة أقسام متساوية وايجاد البعدين الاحداثيين لكل من نقط التقسيم المذكور

٦ عين النقط المبينة احداثياتها فى المجموعتين الآتيتين

أولا (١٥ ، ٠) و (١٥ ، ٦) و (١٥ ، ١٥) و (١٥ ، —٣) و (١٥ ، —١٢)

ثانيا (—١٢ ، ٢٤) و (—٣ ، ٢٤) و (٠ ، ٢٤) و (٩ ، ٢٤) و (١٨ ، ٢٤)

وبين أن نقط المجموعة الأولى توجد على مستقيم يوازى محور الصادات وأن نقط المجموعة الثانية على مستقيم يوازى محور السينات ثم أوجد بعدى الاحداث لنقطة تقاطع هذين المستقيمين

٧ عين كلا من النقط الآتية واستخرج بالحساب بعد كل منها عن نقطة الأصل ثم حققه بالقياس

سنتيمتر

أولا (٤٥ ، ٢٤)	ثالثا (٧,٢ ، ٢,١)
ثانيا (—٤٥ ، —٢٤)	رابعا (—٢,١ ، ٧,٢)

٨ عين نقطتي كل مجموعة من المجاميع الآتية واستخرج بالحساب البعد بينهما ثم حققه بالقياس

أولا (١٢ ، ٠) و(٠ ، ٩)	رابعا (٣٠ ، ١٢) و(—١٥ ، ٣٦)
ثانيا (٢٧ ، ٢٤) و(١٥ ، ١٥)	خامسا (٦٠ ، ٣٦) و(—٤٥ ، ٠)
ثالثا (٤٥ ، ٠) و(٠ ، ٢٤)	سادسا (٦٠ ، ٢٧) و(—٤٥ ، —٩)

٩ بين أن النقط (—٩ ، ٦) و(٩ ، ٣٠) و(٢١ ، ٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين ثم استخرج بالحساب طول كل من ساقيه وحقق الناتج بالقياس

١٠ عين النقط الثمانية الآتية (٠ ، ١٥) و(٩ ، ١٢) و(١٥ ، ٠) و(١٢ ، —٩) و(—١٥ ، ٠) و(٠ ، —١٥) و(—١٢ ، ٩) و(—١٢ ، —٩) ثم بين أنها واقعة على محيط دائرة مركزه نقطة الأصل

١١ بين بالرسم سبب تساوي البعد بين كل نقطتين في كل من المجاميع الآتية

أولا (١ ، ٠) و(٠ ، ب)

ثانيا (ب ، ٠) و(٠ ، ١)

ثالثا (٠ ، ٠) و(١ ، ب)

١٢ ارسم المستقيمين الواصلين بين

أولا (١ ، ٠) و (٠ ، ١)

ثانيا (٠ ، ٠) و (١ ، ١)

واثبت أن هذين المستقيمين متعامدان وأن كلا منهما ينصف الآخر

١٣ بين أن النقط (٠ ، ١٢) و (٣٦ ، ٢٧) و (٣٦ ، —١٢) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين وأن محور السينات ينصف قاعدة هذا المثلث

١٤ النقط (٤٢ ، ٠) و(٤٢ ، ٣٠) و(٠ ، ٣٠) هي رؤوس ثلاثة لمستطيل والمطلوب تعيين رأسه الرابع وإيجاد البعدين الاحداثيين لنقطة تقاطع قطريه

١٥ برهن على أن النقط الأربع (٠ ، ٠) و (٣٩ ، ٠) و (٥٤ ، ٣٦) و (١٥ ، ٣٦) هى رؤوس معين وأوجد طول ضلعه والبعدين الاحداثيين لنقطة تقاطع قطريه

١٦ عين المحل الهندسى لنقطة تتحرك على شرط أن يكون بعداها عن النقطتين (٠ ، ٠) و (١٢ ، —١٢) دائما متساويين ثم عين نقطتى تقاطع المحل الهندسى المذكور بالمحورين الاحداثيين

١٧ بين أن النقط الأربع فى كل من المجاميع الآتيـة هى رؤوس مستطيل ارسمه واستخرج مساحته بالحساب

أولا (١٢ ، ٩) و (٥١ ، ٩) و (٥١ ، ٣٦) و (١٢ ، ٣٦)

ثانيا (٩ ، ٦) و (٩ ، ٤٥) و (—١٨ ، ٤٥) و (—١٨ ، ٦)

ثالثا (١٥ ، ٣) و (—٢٤ ، ٣) و (—٢٤ ، —٢٤) و (١٥ ، —٢٤)

١٨ صل على الترتيب بين النقط (٣ ، ٠) و (٠ ، ٣) و (—٣ ، ٠) و (٠ ، —٣) وبين نوع الشكل الرباعى الحادث مع تعيين مساحته ومساحة الشكل الحادث من وصل منتصفات أضلاعه على الترتيب

١٩ ارسم المثلثات التى رؤوسها النقط الآتية ثم أوجد مساحة كل منها

أولا (٣٠ ، ٣٠) و (١٢ ، ٠) و (٥٤ ، ٠)

ثانيا (٣٠ ، —٣٠) و (١٢ ، ٠) و (٥٤ ، ٠)

ثالثا (—٣٠ ، ٣٠) و (—١٢ ، ٠) و (—٥٤ ، ٠)

رابعا (—٣٠ ، —٣٠) و (—١٢ ، ٠) و (—٥٤ ، ٠)

٢٠ ارسم المثلثين اللذين رؤوسهما النقط الآتية ثم أوجد مساحتهما وقس درج زوايا المثلث الأول

أولا (٠ ، ٠) و (١٥ ، ٩) و (١٨ ، ٠)

ثانيا (٠ ، ٠) و (٩ ، ٠) و (٠ ، ١٨)

٢١ ارسم المثلثات التى رؤوسها النقط الآتية ثم بين أن فى كل مثلث ضلعا يوازى أحد المحورين وبذلك أوجد مساحة كل منها

أولا (٠ ، ٠) و (٣٦ ، ٣٠) و (٣٦ ، —١٨)

ثانيا (٠ ، ٠) و (١٥ ، ٢٤) و (—٤٥ ، ٢٤)

ثالثا (٠ ، ٠) و (—٣٦ ، ٣٦) و (—٣٦ ، —٢٤)

رابعا (٠ ، ٠) و (—١٨ ، —٢٤) و (٦٠ ، —٢٤)

٢٢ بين أن فى كل مثلث من المثلثات الآتيـــة ضلعين يوازيان المحورين الاحداثيين ثم أوجد مساحة كل منها

أولا (١٥،١٥)و(٤٥،١٥)و(٤٥،٤٥) | ثالثا (١٢،٢٤) و(—٤٨،—١٢)و(١٢،—١٢)

ثانيا (٢٤،٩)و(٢٤،٥٤)و(٠،٥٤) | رابعا (٣،٤٥) و(—٣٣،٤٥)و(٣،—٢١)

٢٣ بين أن (—١٥،١٥) و(٢١،٣٠) و(٣٠،١٨) و(—٦،٣) هى رؤوس شكل متوازى الأضلاع وأوجد طول كل من أضلاعه ومساحته

٢٤ بين أن النقط الأربع فى كل من المجاميع الآتية تحدث شبه منحرف وأوجد مساحته

أولا (٩،٠) و (٩،٩) و (٢٧،٠) و (٢٧،١٨)

ثانيـا (٠،٩) و (—١٥،٩) و (—٦،—٩) و (٠،—٩)

ثالثـا (٢٤،١٢) و (١٢،١٢) و (٣٣،—٣) و (٩،—٣)

رابعـا (٠،٠) و (—٣،١٥) و (—١٢،١٥) و (—٢٤،٠)

٢٥ أوجد مساحة المثلث الحادث من وصل النقط الثلاث فى كل من المجاميع الآتية

أولا (١٥،١٥) و (٦٠،٣٠) و (٣٦،٤٢)

ثانيـا (٢١،١٨) و (—٣٠،١٢) و (—١٢،—٩)

ثالثـا (٠،—١٨) و (٠،—٩) و (٤٢،١٥)

رابعـا (١٨،١٢) و (—٢١،—١٨) و (—٦،—٤٥)

٢٦ بين أن (—١٥،٠) و(٢١،١٥) و(٥٧،٠) و(٢١،—١٥) رؤوس معين وأوجد طول ضلعه ومساحته

٢٧ صل على الترتيب بين النقط (٠،—١٥) و(٣٦،٠) و(١٢،١٨) و(—٢٤،—٩) ثم استخرج بالحساب أطوال المستقيمات الثلاثة الأولى وقس طول المستقيم الرابع ثم أوجد مساحة الجزء من الشكل الواقع فى الربع الأول وجزئه الواقع فى الربع الرابع

٢٨ البعدان الاحداثيان للنقط ا ، ب ، حـ ، ء هما (—١٢،—١٢) و(—٣٠،١٢) و(—٣٠،٣٩) و (١٥،١٥)

والمطلوب حساب أطوال ا ب ، ب حـ ، حـ ء وقياس ا ء وحســاب مساحة ا ب حـ ء باعتبار أنه يساوى الفرق بين مثلثين

٢٩ ارسم شكلا رؤوسه على الترتيب (٠، — ٩) و(٢٤، ٩) و(— ١٢، ٢٤) و(—١٢، ٩) و(٠، ٠) ثم قسمه الى ثلاثة مثلثات قائمة الزوايا ومن ذلك استخرج مساحته مع ايجاد أطوال أضلاعه

٣٠ مزرعة على هيئة مثلث مثل ا ب ح رسم على ورق المربعات (بمقياس ٣ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر) فوجد فى الرسم المذكور أن البعدين الاحداثيين لكل من النقط ا، ب، ح هما على الترتيب (— ٣، — ٩) و(٩، ١٢) و(— ١٥، — ٦) من السنتيمترات مامساحة المزرعة وما طول ضلعها الدال عليه ب ح فى الرسم وما مقدار البعد بين هذا الضلع ورأس المزرعة المقابل له

٣١ بين أن النقط (١٨، ٠) و(٦٠، ١٨) و(٤٢، ٦٠) و(٠، ٤٢) هى رؤوس مربع قس ضلعه واستخرج من ذلك مساحته التقريبية ثم احسب المساحة بالضبط .

وذلك (أولا) برسم مربع آخر أضلاعه تمر برؤوس المربع الأول المعلوم

(وثانيا) بتقسيم المربع المعلوم بالكيفية التى انقسم بها المربع فى الشكل الأول الذى فى صفحة ١٢٩

(مسائل متنوعة)

١ اذا كان ا ب حـ مثلثا ضلعاه ا ب ، ا حـ غير متساويين وكان ا س المستقيم المتوسط الممدود من ا ، ا م منصف الزاوية ب ا حـ ، ا د العمود النازل من ا على ب حـ لزم أن يقع ا م بين ا د ، ا س وأن ينحصر مقداره بينهما

٢ اذا أنزلنا من احدى نهايتي قاعدة مثلث عمودا على منصف زاوية الرأس فان هذا العمود
أولا يصنع مع أي ضلع من الضلعين المحيطين بالزاوية زاوية تساوي نصف مجموع زاويتي القاعدة
وثانيا يصنع مع القاعدة زاوية تساوي نصف الفرق بين هاتين الزاويتين

٣ في أي مثلث الزاوية المحصورة بين منصف زاوية الرأس والعمود النازل من هذا الرأس على القاعدة تساوي نصف الفرق بين زاويتي القاعدة .

٤ ارسم مثلثا قائم الزاوية علم منه الوتر والفرق بين ضلعي القائمة

٥ ارسم مثلثا علمت قاعدته وفرق زاويتيها وفرق الضلعين الآخرين أو مجموعهما

٦ ارسم مثلثا متساوي الساقين علمت قاعدته ومجموع أحد الساقين مع الارتفاع النازل من الرأس على القاعدة

٧ المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى جزأين على شرط أن يكون المربع المنشأ على أحدهما مكافئا مثلي المربع المنشأ على الجزء الآخر

٨ ا ب حـ د متوازي الأضلاع ، م نقطة ما خارجة عن الزاوية ب ا د أو عن التي تقابلها بالرأس والمطلوب البرهنة على أن المثلث م ا حـ يكافئ مجموع المثلثين م ا د ، م ا ب
واذا وقعت م بين ضلعي الزاوية ب ا د أو بين ضلعي التي تقابلها بالرأس كان المثلث م ا حـ مكافئا الفرق بين المثلثين م ا د ، م ا ب

٩ اذا ساوى ضلعان من مثلث قطري شكل رباعي وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث مساوية لاحدى الزاويتين المحصورتين بين القطرين كان المثلث مكافئا الشكل الرباعي

١٠ المطلوب ايجاد المحل الهندسي لنقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة للمثلثات المتكافئة المرسومة على قاعدة معلومة

١١ المطلوب رسم مثلث على قاعدة مثلث آخر معلوم على شرط أن يكافئه وأن يكون رأسه على مستقيم معلوم

١٢ ا ب حـ د شكل متوازي الأضلاع مكونة اضلاعه من قضبان مرتبطة بعضها ببعض ارتباطا مفصليا فاذا كان الضلع ا ب ثابتا لا يتحرك فما هو المحل الهندسي لمنتصف د حـ

الجزء الثالث

الجزء الثالث

الدائرة

تعاريف ومبادئ أوّلية

١ الدائرة هى شكل مستو محاط بخط حادث من حركة نقطة على بعد واحد دائما من نقطة أخرى ثابتة تسمى المركز والخط الذى يحيط بالشكل يسمى محيط الدائرة

تنبيه — الدائرة على هذا التعريف هى السطح الذى يحدده المحيط وكثيرا مايطلق لفظ الدائرة ويراد به المحيط وذلك عند أمن اللبس

٢ نصف قطر الدائرة مستقيم خارج من المركز ومنته بالمحيط وينتج من هذا أن جميع أنصاف الاقطار لدائرة واحدة متساوية

٣ قطر الدائرة مستقيم مارّ بالمركز وطرفاه على المحيط

٤ نصف الدائرة هو شكل محدود بقطر الدائرة وجزء المحيط المنتهى بطرفى هذا القطر وسيأتى البرهان فى صفحة ١٥٧ على أن القطر يقسم الدائرة الى قسمين ينطبق أحدهما على الآخر تمام الانطباق

٥ اذا اشتركت عدّة دوائر فى مركز واحد سميت متحدة المركز

وينتج من هذه التعاريف

(أولا) ان الدائرة محاطة بخط منحن مقفل فاذا قطع مستقيم محيطها فى نقطة ما فانه يقطعه فى نقطة أخرى اذا مد على استقامته

(ثانيا) بعد أى نقطة عن مركز الدائرة أكبر من نصف القطر أو أصغر منه على حسب كون النقطة خارج الدائرة أو داخلها

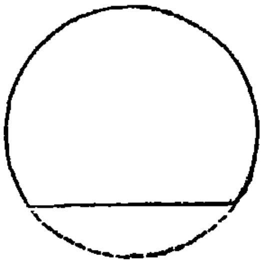
(ثالثا) تكون النقطة خارج الدائرة أو داخلها على حسب كون بعدها عن المركز أكبر من نصف القطر أو أصغر منه

(رابعا) تنطبق الدائرتان كل على الأخرى تمام الانطباق اذا تساوى نصفا قطريهما لأنه اذا وقع مركز احداهما على مركز الأخرى فان جميع نقط المحيط الأول تقع على جميع نقط المحيط الثانى

(خامسا) الدوائر التى تختلف أنصاف أقطارها فى الطول لايمكن أن تتقاطع اذا اتحدت فى المركز لأن بعد كل نقطة على محيط الدائرة الصغرى عن المركز أصغر من بعد كل نقطة على محيط الدائرة الكبرى عن هذا المركز

(سادسا) اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطة لايمكن أن تتحدا فى المركز إلا اذا انطبق محيطاهما كل على الآخر تماما

٦ قوس الدائرة جزء من محيطها



٧ وتر الدائرة مستقيم واصل بين أى نقطتين على المحيط

تنبيه — ينتج من هذه التعاريف أنه اذا لم يمر وتر الدائرة بمركزها فانه يقسم المحيط الى قوسين غير متساويين أحدهما أكبر من نصف المحيط والآخر أصغر منه ويطلق على الأول القوس الاكبر والثانى القوس الأصغر والاثنين معا القوسان المترافقان

التماثل فى الدائرة

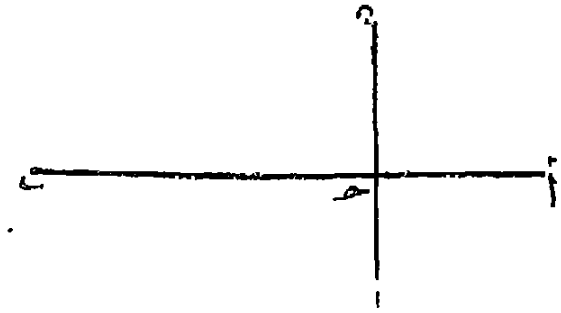
تسهل البرهنة على بعض الخواص الأولية للدائرة باعتبار خواص التماثل ولذلك نورد هنا التعريف المتقدّم ذكره فى صفحة ٢٣

تعريف ١ — يقال ان فى الشكل تماثلا بالنسبة الى خط معلوم فيه متى أمكن طى الشكل بحيث ينطبق جزءاه اللذان يفصلهما ذلك الخط كل على الآخر

ويسمى المستقيم الذى يقسم الشكل الى جزأين متماثلين محور التماثل

ومن الواضح أن هذا الانطباق لايتأتى إلا اذا اتحد الجزءان المتقابلان مساحة وشكلا وتماثلا فى وضعهما بالنسبة الى محور التماثل

تعريف ٢ — اذا فرض أن ا ب مستقيم وأن ﺩ نقطة خارجة عنه



وانزل من ﺩ العمود ﺩ ﺣ على ا ب ثم مد على استقامته وأخذ على امتداده البعد ﺣ ل = ﺣ ﺩ ثم طوى الشكل بحيث ينطبق جزءاه كل على الآخر عند ا ب فان النقطة ﺩ تقع على النقطة ل

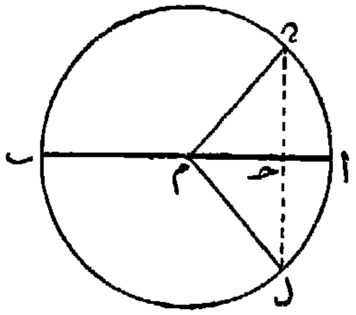
لأن ∠ ا ﺣ ﺩ = ∠ ا ﺣ ل ، ﺩ ﺣ = ﺣ ل

ويقال للنقطتين ﺩ ، ل انهما متماثلتا الوضع بالنسبة الى المحور وأن كلا منهما صورة للأخرى أو مماثلة لها بالنسبة الى المحور

تنبيه — النقطة ومماثلتها على بعدين متساويين عن أى نقطة على المحور (راجع عملية ١٤ صفحة ٩٦)

بعض خواص التمـاثل فى الدوائر

١ قطر الدائرة يقسمها الى جزأين متمـاثلين



اذا فرضنا أن ا ب قطر لدائرة مركزها م

فانه يطلب اثبات أن هذا القطر يقسمها الى جزأين متمـاثلين

البرهان — نمد من م نصفى القطرين م ء ، م ل كل فى جهـة من ا ب بحيث تكون الزاويتان ا م ء ، ا م ل متساويتين

فاذا طبقنا جزء الدائرة ا ء ب على الجزء ا ل ب حول ا ب فان م ء ينطبق على م ل لأن ∠ ا م ء = ∠ ا م ل عملا وتقع النقطة ء على النقطة ل لأن م ء = م ل

وبهـذه الطريقة يمكن إثبـات أن أى نقطة من نقط القوس ا ء ب تقع على أخرى من القوس ا ل ب. وبذلك ينطبق جزءا المحيط كل على الآخر

∴ قطر الدائرة يقسمها الى جزأين متمـاثلين

نتيجة — اذا فرضنا أن ء ل يقطع ا ب فى حـ فمن حيث انه عنـد تطبيق جزأى الدائرة المتماثلين تقع نقطة ء على ل ينتج أن حـ ء ينطبق على حـ ل

∴ حـ ء = حـ ل

، ∠ م حـ ء = ∠ م حـ ل

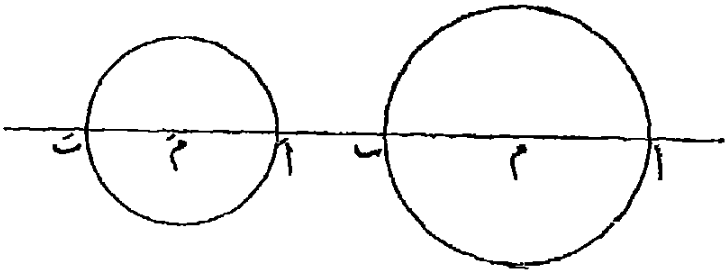
ومن حيث انهما متجاورتان فكل منهما قائمة

∴ ء ، ل متماثلتا الوضع بالنسبة الى ا ب

وعلى ذلك يمكن أن يقال بالعكس اذا مر محيط دائرة بنقطة ما فانه لابد أن يمر بماثلتها بالنسـبة الى قطر ما

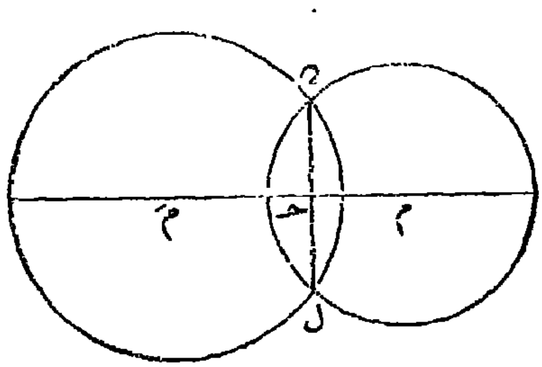
تعريف — المستقيم الواصل بين مركزى دائرتين يسمى خط المركزين

٢ خط المركزين يقسم الدائرتين الى جزأين متماثلين



نفرض أن م ، مَ مركزا دائرتين وأن المستقيم المار بالنقطتين م ، مَ يقطع المحيطين الأول في ا ، ب والثاني في اَ ، بَ فيكون ا ب ، اَ بَ قطرين فهما اذن محورا التماثل كل في دائرته أى أن خط المركزين يقسم كلا من الدائرتين الى جزأين متماثلين

٣ اذا تقاطع محيطا دائرتين في نقطة تقاطعا في نقطة أخرى وكان خط مركزيهما عمودا على الوتر المشترك بينهما مارا بمنتصفه



نفرض أن الدائرتين اللتين مركزاهما م ، مَ تقاطعتا في ن

ننزل من ن العمود ن حـ على م مَ ثم نمده على استقامته الى ل بحيث يكون البعد حـ ل = حـ ن

فالنقطتان ن ، ل اذن متماثلتا الوضع بالنسبة الى خط المركزين م مَ

ومن حيث ان احداهما ن واقعة على كل من المحيطين فان الأخرى ل تقع على المحيطين ايضا (نتيجة من الخاصة ١)

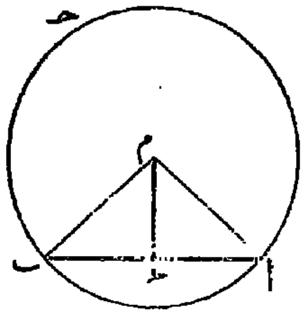
ومن حيث ان حـ ن = حـ ل وهو أيضا عمود على م مَ بالعمل

∴ خط المركزين م مَ عمود على الوتر المشترك مار بمنتصفه

في الأوتار

نظرية ٣١

المستقيم المار بمركز الدائرة والمنصف لأى وتر فيها غير مار بالمركز عمود على هذا الوتر وبالعكس اذا كان هذا المستقيم عمودا على الوتر فانه ينصفه



اذا فرضنا ان ا ب حـ دائرة مركزها م وأن م د ينصف الوتر ا ب غير المار بالمركز م
فانه يطلب اثبات أن م د عمود على ا ب
لذلك نصل م ا ، م ب
البرهان — فى المثلثين ا د م ، ب د م

من حيث ان { ا د = ب د فرضا
، م د مشترك
، م ا = م ب لأنهما نصفا قطرين }

∴ ∠ ا د م = ∠ ب د م (نظرية ٧)

ولكونهما متجاورتين

∴ م د عمود على الوتر ا ب وهو المطلوب

وبالعكس اذا فرضنا أن م د عمود على ا ب
فانه يطلب إثبات أن م د ينصف ا ب
البرهان — فى المثلثين م د ا ، م د ب القائمى الزاوية

من حيث ان { ∠ م د ا = ∠ م د ب بالقيام
، م ا = م ب
، الضلع م د مشترك }

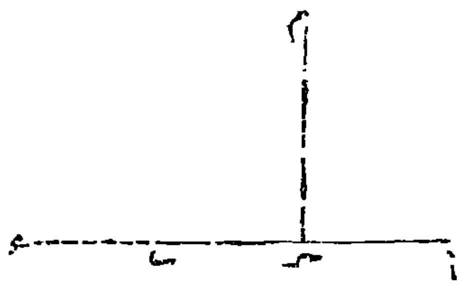
∴ د ا = د ب (نظرية ١٨)

أى أن م د ينصف ا ب فى نقطة د. وهو المطلوب

نتيجة ١ — المستقيم المقام عمودا على وتر فى دائرة من منتصفه يمر بمركزها

نتيجة ٢ — المستقيم لايمكن أن يقطع الدائرة فى أكثر من نقطتين

لأنه اذا فرض أن مستقيما قطع دائرة مركزها م فى النقطتين ا ، ب



وأنزل من م العمود م حـ على ا ب

حدث أن ا حـ = حـ ب

فلو قطعت الدائرة المستقيم ا ب فى نقطة ثالثة مثل ء

لكان ا حـ مساويا حـ ء وهذا محال

نتيجة ٣ — وتر الدائرة يكون بتمامه فيها

تمارين

(عددية وتخطيطية)

١ فى شكل نظرية ٣١ اذا كان الوتر ا ب = ٨ سنتيمترات ، م ء = ٣ سنتيمترات فما طول م ا ارسم الشكل وحقق الناتج بالقياس

٢ المطلوب ايجاد طول الوتر الذى على بعد ٥ سنتيمترات من مركز دائرة نصف قطرها ١٣ سنتيمترا

٣ ارسم وترين فى دائرة نصف قطرها سنتيمتران طول أحدهما ٣٫٢ من السنتيمترات وطول الآخر ٢٫٤ من السنتيمترات ثم أوجد مقدار بعديهما عن مركز الدائرة بالحساب وحققه بالقياس

٤ ارسم وترا طوله ٦ سنتيمترات فى دائرة قطرها ٨ سنتيمترات واحسب بعد الوتر عن مركز الدائرة لأقرب مليمتر وحقق الناتج بالقياس

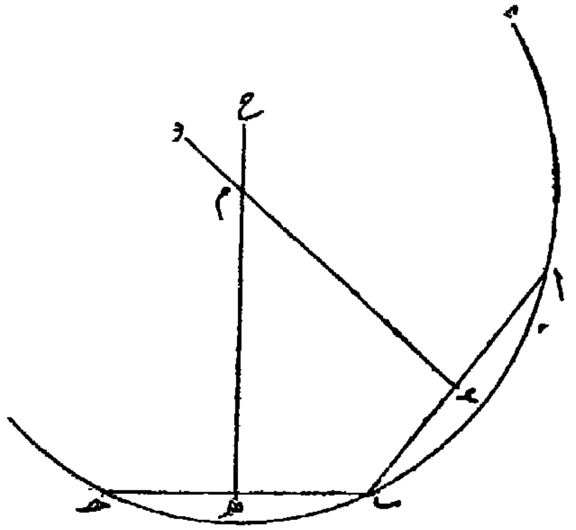
٥ دائرة قطرها ١٨٥ سنتيمترا مرسوم فيها وتر طوله ١٧٥ سنتيمترا والمطلوب حساب بعد هذا الوتر عن المركز ووضع رسم لذلك (بمقياس سنتيمتر لكل ٥٠ سنتيمترا) يمكن بواسطته تحقيق الناتج بالقياس

٦ ا ب وتر طوله ٢٫٤ من البوصات مرسوم فى دائرة مركزها م ونصف قطرها ١٫٣ من البوصات ما مساحة المثلث م ا ب

٧ ل ، ن نقطتان البعد بينهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم دائرة تمر بهما نصف قطرها ٣٫٤ من السنتيمترات واستخراج بعد المركز عن الوتر ل ن بالحساب وتحقيق ذلك بالقياس

نظرية ٣٢

كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لايمكن أن يمر بها إلا محيط دائرة واحد



الفرض ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

والمطلوب إثبات أنه لايمكن أن يمر بهذه النقط إلا محيط دائرة واحد

لذلك نصل ا ب ، ب حـ

ثم نقيم على ا ب ، ب حـ من منتصفيهما العمودين ء و ، هـ ح

فمن حيث ان المستقيمين ا ب ، ب حـ ليسا على استقامة واحدة فالعمودان ء و ، هـ ح لايمكن أن يتوازيا فيتقاطعان فى م

البرهان — من حيث ان ء و عمود على ا ب من منتصفه

∴ كل نقطة من نقطه على بعدين متساويين عن ا ، ب (عملية ١٤)

وكذلك كل نقطة من نقط هـ ح على بعدين متساويين عن ب ، حـ

∴ نقطة م على أبعاد متساوية عن ا ، ب ، حـ لأنها نقطة تقاطع العمودين

ومن حيث انه لايوجد نقطة خلافها على أبعاد متساوية عن ا ، ب ، حـ

∴ الدائرة التى مركزها م ونصف قطرها م ا تمر بالنقطتين ب ، حـ ويكون محيط هذه الدائرة هو المحيط الوحيد الذى يمر بالنقط الثلاث المعلومة وهو المطلوب

نتيجة ١ — يكفى لتعيين وضع الدائرة ومساحتها معرفة ثلاث نقط فقط من محيطها لأنه بذلك يتعين وضع المركز وطول نصف القطر

نتيجة ٢ — لا يمكن أن يشترك محيطا دائرتين فى أكثر من نقطتين إلا اذا انطبق كل على الآخر تمام الانطباق لانهما ان اشتركا فى ثلاث نقط لزم أن يتحدا فى كل من المركز ونصف القطر

فرض عملى — يؤخذ من نظرية ٣٢ أنه يمكن فرض رسم محيط دائرة يمر برؤوس مثلث معلوم

تعريف — يقال للدائرة المارّة برؤوس المثلث انها مرسومة عليه أو مرسومة خارجه

تمارين على نظريتى ٣١ و ٣٢

(مسائل نظرية)

(١) اذا قطع مستقيم دائرتين متحدتى المركز فان جزأيه المحصورين بين محيطيهما متساويان

(٢) دائرتان مركزاهما ا ، ب متقاطعتان فى حـ ، ء برهن على أن مركزيهما ا ، ب ومنتصف الوتر المشترك حـ ء على استقامة واحدة

وعلى ذلك برهن على أن خط المركزين عمود على الوتر المشترك مار بمنتصفه

(٣) ا ب ، ا حـ وتران متساويان فى دائرة برهن على أن منصف ∠ ب ا حـ يمر بالمركز

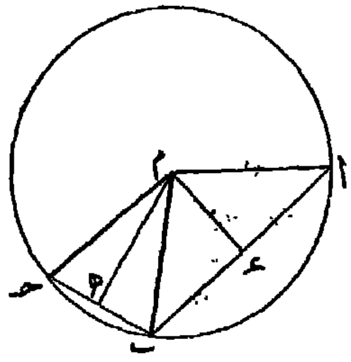
(٤) أوجد المحل الهندسى لمراكز جميع الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين

(٥) ارسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين على شرط أن يكون مركزها على مستقيم معلوم . متى تستحيل هذه المسئلة

(٦) ارسم دائرة نصف قطرها معلوم تمر بنقطتين معلومتين . متى تستحيل حل هذه المسئلة

نظرية ٣٣

اذا أمكن مد ثلاثة مستقيمات متساوية من نقطة داخل دائرة الى محيطها كانت النقطة المذكورة مركز الدائرة



اذا فرضنا أن ا ب ح الدائرة المعلومة وأن م نقطة داخلها وأن المستقيمات م ا ، م ب ، م ح الممدودة منها الى محيط الدائرة متساوية

فانه يطلب إثبات أن م مركز الدائرة ا ب ح

لذلك نصل ا ب ، ب ح

وننصف ا ب في د ، ب ح في هـ

ونصل م د ، م هـ

البرهان — في المثلثين م د ا ، م د ب

من حيث ان { د ا = د ب
، د م مشترك
، م ا = م ب } بالفرض

∴ ∠ م د ا = ∠ م د ب (نظرية ٧)

ولكونهما متجاورتين فكل منهما قائمة

ولكون المستقيم د م عمودا على ا ب من منتصفه

يمر بمركز الدائرة (نظرية ٣١ نتيجة ١)

وكذلك المستقيم هـ م

ومن حيث ان د م ، هـ م لايتقاطعان إلا في م فهي المركز وهو المطلوب

تمارين على الأوتار

(مسائل عددية وتخطيطية)

١ ا ب ، ب حـ مستقيمان متعامدان طول الأول ٤ سنتيمترات والثانى ٧,٥ من السنتيمترات والمطلوب رسم دائرة تمر بالنقط ا ، ب ، حـ وحساب طول نصف قطرها وتحقيقه بالقياس

٢ ارسم دائرة يكون فيها الوتر الذى طوله ٦ سنتيمترات على بعد ٣ سنتيمترات من المركز واحسب طول نصف القطر لأقرب مليمتر وحققه بالقياس

٣ ارسم دائرة قطرها ٨ سنتيمترات وارسم فيها وترا مساويا نصف القطر ثم احسب بعد هذا الوتر عن المركز لأقرب مليمتر وحققه بالقياس

٤ دائرتان نصف قطر إحداهما ٢٦ سنتيمترا ونصف قطر الأخرى ٢٥ سنتيمترا تقاطعتا فى نقطتين البعد بينهما ٤٨ سنتيمترا والمطلوب حساب مقدار البعد بين المركزين ووضع رسم لذلك (بمقياس سنتيمتر لكل ١٠ سنتيمترات) وتحقيق الناتج بالقياس

٥ وتران متوازيان فى دائرة قطرها ١٣ سنتيمترا طول أحدهما ٥ سنتيمترات والآخر ١٢ سنتيمترا بين أن البعد بينهما إما أن يكون ٨,٥ من السنتيمترات أو ٣,٥ من السنتيمترات

٦ وتران متوازيان فى دائرة فى جهة واحدة من مركزها طول أحدهما ٦ سنتيمترات والآخر ٨ والبعد بينهما سنتيمتر واحد والمطلوب حساب مقدار نصف القطر وقياسه

٧ بين على ورق المربعات أنه اذا ركز فى أى نقطة على محور السينات ورسم محيط دائرة يمر بالنقطة (٦ ، ٥) فانه لابد أن يمر بالنقطة (٦ ، —٥) (راجع صفحة ١٤٣)

(مسائل نظرية)

٨ المستقيم الواصل بين منتصفى وترين متوازيين فى دائرة يمر بمركزها

٩ أوجد المحل الهندسى لمنتصفات الأوتار المتوازية فى الدائرة

١٠ الوتران المتقاطعان فى الدائرة لاينصف أحدهما الآخر إلا اذا كان كل منهما قطرا

١١ نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع المرسوم داخل[1] دائرة تكون مركز هذه الدائرة

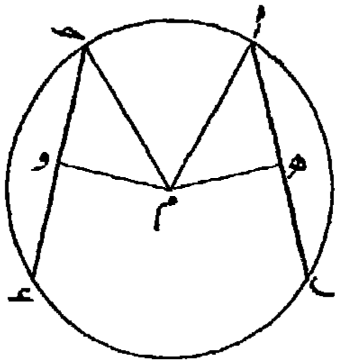
١٢ متوازى الأضلاع الذى يمكن رسمه داخل دائرة لايكون إلا مستطيلا أو مربعا

---

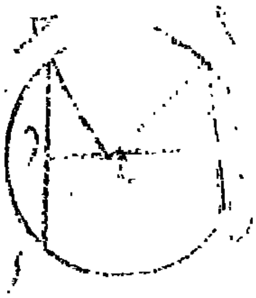
(١) الشكل المرسوم داخل دائرة مامر محيطها برؤوسه

نظرية ٣٤

الاوتار المتساوية فى الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها و بالعكس الاوتار التى على أبعاد متساوية عن المركز متساوية



اذا فرضنا ان ا ب ، حـ د وتران فى الدائرة التى مركزها م
وان م هـ ، م و عمودان عليهما من م
(فأولا) اذا كان ا ب = حـ د
فانه يطلب إثبات أن البعد م هـ = البعد م و
لذلك نصل م ا ، م حـ
البرهان — من حيث ان م هـ عمود على ا ب
∴ م هـ ينصف ا ب (نظرية ٣١)
أى أن ا هـ = هـ ب
وكذلك حـ و = و د
لكن ا ب = حـ د فرضا
∴ ا هـ = حـ و
ثم انه فى المثلثين م هـ ا ، م و حـ
من حيث ان { ∠ م هـ ا = ∠ م و حـ بالقيام
والضلع م ا = الضلع م حـ
، ا هـ = حـ و }
∴ يتطابق المثلثان (نظرية ١٨)
ومنه ينتج ان م هـ = م و وهو المطلوب
(وثانيا) بالعكس اذا كان م هـ = م و
فانه يطلب إثبات أن ا ب = حـ د



البرهان — ثبت مما تقدم أن ا هـ نصف ا ب ، حـ و نصف حـ ى

ففى المثلثين م هـ ا ، م و حـ

من حيث ان { ∠ م هـ ا = ∠ م و حـ بالقيام
، م ا = م حـ
، م هـ = م و }

∴ ا هـ = حـ و (نظرية ١٨)

∴ مثلا كل منهما متساويان

أى أن ا ب = حـ ى وهو المطلوب

(مسائل نظرية)

١ المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمنتصفات الأوتار المتساوية فى الدائرة

٢ اذا تقاطع وتران فى دائرة وكان المستقيم الواصل من نقطة تقاطعهما الى المركز منصفا للزاوية المحصورة بينهما كان هذان الوتران متساويين

٣ اذا تقاطع وتران متساويان فى دائرة فان جزأى أحدهما يساويان جزأى الآخر كل لنظيره

٤ المطلوب رسم وتر فى دائرة معلومة يساوى طولا معلوما (على شرط ألا يكون أكبر من القطر) ويوازى مستقيما معلوما

٥ ل ى وتر معلوم فى دائرة ، ا ب قطر فيها والمطلوب إثبات أن مجموع العمودين النازلين من ا ، ب على ل ى أو الفرق بينهما ثابت مهما تغير وضع القطر

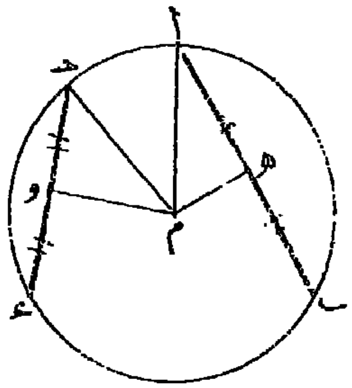
(مسائل تخطيطية)

٦ دائرة نصف قطرها يساوى ٤٫١ من السنتيمترات رسم فيها عدة أوتار متساوية طول كل منها ١٫٨ من السنتيمترات اثبت أن منتصفات هذه الأوتار على محيط دائرة واحد واحسب طول نصف قطرها ثم قسه بعد أن ترسمها

٧ البعد بين مركزى دائرتين هو ٨ سنتيمترات وطول الوتر المشترك بينهما ٤٫٨ من السنتيمترات ونصف قطر الدائرة الكبرى ٧٫٤ من السنتيمترات اذكر حلا لايجاد نقطتى تقاطع الدائرتين واوجد طول نصف قطر الدائرة الصغرى

نظرية ٣٥

اذا اختلف بعــدا وترين عن مركز الدائرة فأقرب الوترين أكبرهما وبالعكس اكبر الوترين أقربهما من المركز



نفرض أن ا ب ، حـ ء وتران فى دائرة مركزها م

وان م هـ ، م و العمودان النازلان من م عليهما وتثبت انه

(١) اذا كان م هـ أصغر من م و يكون

ا ب أكبر من حـ ء

(٢) اذا كان ا ب أكبر من حـ ء يكون م هـ أصغر من م و

لذلك نصل م ا ، م حـ

البرهان — من حيث ان م هـ عمود على الوتر ا ب

∴ م هـ ينصف ا ب

أى ان ا هـ = هـ ب

وكذلك حـ و = و ء

ومن حيث ان م ا = م حـ

∴ المربع المنشأ على م ا = المربع المنشأ على م حـ

ولكون ∠ م هـ ا قائمة

∴ المربع المنشأ على الوتر م ا = مجموع المربعين المنشأين على م هـ ، هـ ا

وكذلك المربع المنشأ على م حـ = مجموع المربعين المنشأين على م و ، و حـ

∴ مجموع المربعين المنشأين على م هـ ، هـ ا = مجموع المربعين المنشأين على م و ، و حـ

فينتـــج

(١) اذا كان م هـ أصغر من م و فالمربع المنشأ على م هـ أصغر من المربع المنشأ على م و

∴ المربع المنشأ على هـ ا لابد أن يكون أكبر من المربع المنشأ على و ح

∴ هـ ا أكبر من و ح

∴ ا ب أكبر من ح ء

(٢) وبالعكس اذا كان ا ب أكبر من ح ء

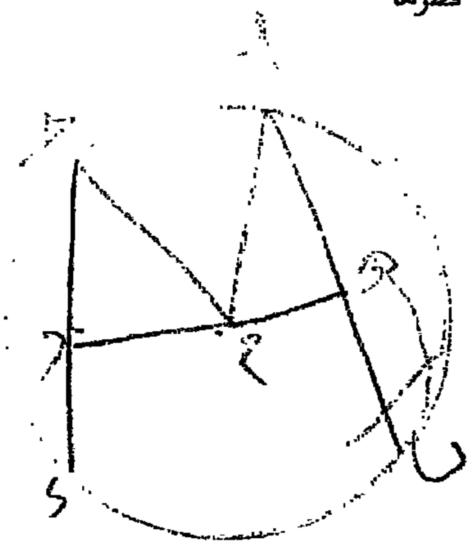
اى أنه اذا كان هـ ا أكبر من و ح

فالمربع المنشأ على هـ ا أكبر من المربع المنشأ على و ح

∴ لابد أن يكون المربع المنشأ على م هـ اصغر من المربع المنشأ على م و

∴ م هـ أصغر من م و وهو المطلوب

نتيجة — أكبر أوتار الدائرة قطرها



تمارين

(مسائل متنوعة)

١ ارسم أقصر الأوتار التى يمكن رسمها فى الدائرة من نقطة مفروضة داخلها

٢ ارسم المثلث ا ب ح اذا علم أن ضلعه ا ب = ٧ سنتيمترات ، ب ح = ٢٫٤ من السنتيمترات ، ح ا = ٧٫٤ من السنتيمترات ثم ارسم دائرة تمر بنهايتى الضلع ا ب ويكون مركزها على الضلع ح ا واحسب طول نصف القطر ثم قسه

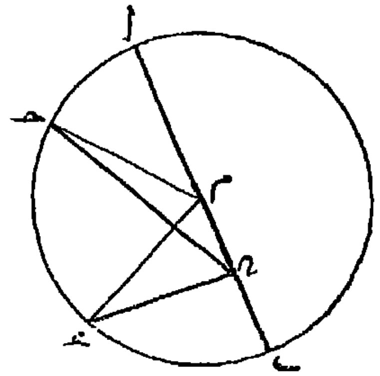
٣ مثلث طول أضلاعه ٦٫٥ من السنتيمترات ، ٧ سنتيمترات ، ٧٫٥ من السنتيمترات ارسم دائرة تمر برؤوسه وقس نصف قطرها

٤ ا ب وتر ثابت فى دائرة معلومة ، س ص وتر متحرك بحيث يكون منتصفه ع دائما على ا ب . متى يكون س ص أطول ما يمكن ومتى يكون أصغر ما يمكن
بين أن طول س ص يتزايد كلما اقتربت ع من منتصف الوتر ا ب

٥ بين على ورق المربعات أن الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٦ سنتيمترات تمر بالنقطتين (٨٫٤ ، ٣٫٦) من السنتيمترات ، (٣٫٦ ، ٤٫٨) من السنتيمترات
ثم اوجد (١) طول الوتر الواصل بين هاتين النقطتين و (٢) البعدين الاحداثيين لمنتصف هذا الوتر (٣) بعد هذا الوتر عن نقطة الأصل

نظرية ٣٦

اذا رسم من نقطة داخل دائرة غير مركزها عدة مستقيمات الى محيطها فأكبرها ما كان مارا بالمركز وأصغرها هو امتداد الأكبر ليكون قطرا وأكبر المستقيمات الأخرى ما كان مقابلا لأكبر زاوية مركزية
(والزاوية المركزية ما كان رأسها فى مركز الدائرة)



فاذا فرض أن

ا حـ ى ب دائرة ٯ ن نقطة ما غير المركز داخلها

ورسم من ن المستقيم ن ا مارا بالمركز والمستقيم ن ب على استقامة ا ن والمستقيمان ن ى ٯ ن حـ

وكانت الزاوية المركزية ن م حـ التى يقابلها ن حـ أكبر من ∠ ن م ى التى يقابلها ن ى

فانه يطلب إثبات أن

(١) ن ا أكبر المستقيمات

(٢) ن ب أصغرها

(٣) ن حـ أكبر من ن ى

لذلك نصل م حـ ٯ م ى

البرهان (١) فى △ ن م حـ مجموع الضلعين ن م ٯ م حـ أكبر من ن حـ (نظرية ١١)

لكن م حـ = م ا لأنهما نصفا قطرين

∴ ن م + م ا أكبر من ن حـ

أى أن ن ا أكبر من ن حـ

وكذلك يبرهن على أن ﻫ ا أكبر من اى مستقيم آخر يرسم من ﻫ الى المحيط

∴ ﻫ ا أكبر هذه المستقيمات

(٢) فى △ ﻫ م ء مجموع الضلعين ﻫ م ، ﻫ ء أكبر من الضلع م ء

لكن م ء = م ب لأنهما نصفا قطرين

∴ ﻫ م + ﻫ ء أكبر من م ب

وبطرح الجزء المشترك ﻫ م ينتج أن

ﻫ ء أكبر من ﻫ ب

ويمكن أيضاً إثبات أن أى مستقيم آخر يرسم من ﻫ الى المحيط يكون أكبر من ﻫ ب

∴ ﻫ ب أصغر هذه المستقيمات

(٣) فى △ ﻫ م ح ، △ ﻫ م ء

من حيث ان { ﻫ م مشترك ، م ح = م ء لأنهما نصفا قطرين ، و ∠ ﻫ م ح أكبر من ∠ ﻫ م ء فرضاً }

∴ ﻫ ح أكبر من ﻫ ء (نظرية ١٩) وهو المطلوب

تمارين

(مسائل متنوعة)

١ برهن على أن جميع الدوائر التي تمر بنقطة معلومة ومراكزها على مستقيم معلوم غير مار بالنقطة المعلومة يجب أن تمر جميعها بنقطة أخرى ثابتة

٢ اذا قطع مستقيم دائرتين متقاطعتين وكان موازيا لوترهما المشترك فان جزأى القاطع المحصورين بين محيطى الدائرتين متساويان

٣ اذا تقاطعت دائرتان فأى مستقيمين متوازيين يمران بنقطتى تقاطعهما وينتهيان بالمحيطين يكونان متساويين

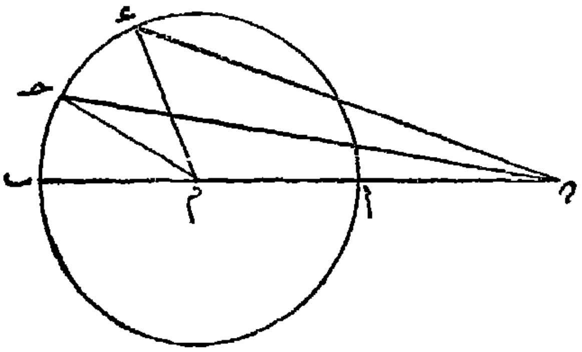
٤ اذا تقاطع محيطا دائرتين فالمستقيمان المـاران باحدى نقطتى التقاطع والمنتهيان بالمحيطين متساويان ان صنعا مع الوتر المشترك زاويتين متساويتين

٥ دائرتان متقاطعتان طول وترهما المشترك ٢٤ سنتيمترا وقطر إحداهما ٧٤ سنتيمترا وقطر الأخرى ٤٠ سنتيمترا ماطول البعد بين مركزيهما ارسم الشكل (بمقياس سنتيمتر لكل ١٠ سنتيمترات) حقق الناتج بالقياس

٦ ارسم دائرتين نصف قطر إحداهما سنتيمتران ونصف قطر الأخرى ٣,٤ من السنتيمترات والبعد بين المركزين ٤,٢ من السنتيمترات واحسب طول الوتر المشترك ومقدار بعده عن كل من المركزين وحقق ذلك بالقياس

نظرية ٣٧

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها عدّة مستقيمات الى المحيط فأكبرها مامر بالمركز وأصغرها ما اذا امتدّ على استقامته مر بالمركز وأكبر المستقيمات الأخرى ما كان مقابلا لأكبر زاوية مركزية



اذا فرضنا أن ا ب حـ ء الدائرة المعلومة

وان ه النقطة المفروضة خارجها ورسمنا المستقيمات ه ا ب ، ه حـ ، ه ء الى محيطها

وكان الأول منها مارًّا بالمركز م والزاوية المركزية ه م حـ التي يقابلها ه حـ أكبر من الزاوية المركزية ه م ء التي يقابلها ه ء

فانه يطلب إثبات أن

(١) ه ب أكبر المستقيمات

(٢) ه ا أصغرها

(٣) ه حـ أكبر من ه ء

لذلك نصل م حـ ، م ء

البرهان (١) في △ ه م حـ مجموع الضلعين ه م ، م حـ أكبر من الضلع ه حـ

لكن م حـ = م ب لأنهما نصفا قطرين

∴ ه م + م ب أكبر من ه حـ

أى أن ه ب أكبر من ه حـ

وكذلك يمكن إثبات أن ه ب أكبر من أى مستقيم آخر يرسم من ه الى محيط الدائرة

اى أن ه ب أكبر المستقيمات

(٢) فى △ ه ء م مجموع الضلعين ه ء ، ء م أكبر من ه م

لكن م ء = م ا لأنهما نصفا قطرين

فالجزء الباقى ه ء أكبر من الجزء الباقى ه ا

وكذلك يمكن إثبات أن أى مستقيم آخر يخرج من النقطة ن الى محيط الدائرة يكون أكبر من ن ا

اى أن ن ا أصغر المستقيمات

(٣) فى Δ ن م ح ، Δ ن م ء

من حيث ان { ن م مشترك
، م ح = م ء لأنهما نصفا قطرين
، ل ن م ح أكبر من ل ن م ء فرضا }

∴ ن ح أكبر من ن ء (نظرية ١٩) وهو المطلوب

تمارين

(مسائل متنوعة)

١ المعلوم دائرتان غير متقاطعتين والمطلوب ايجاد أطول وأقصر المستقيمات التى أحد طرفيها على أحد المحيطين والطرف الآخر على المحيط الثانى

٢ اذا فرضت نقطة على محيط دائرة ورسم منها مستقيمات منتهية بالمحيط فان أكبرها ما مر بالمركز وأكبر أى اثنين آخرين ماقابل زاوية مركزية أكبر مما قابلها الآخر

٣ أكبر المستقيمات المارة باحدى نقطتى تقاطع دائرتين والمنتهية بالمحيطين ما كان موازيا لخط المركزين

٤ ارسم دائرتين على ورق المربعات مركزاهما على محور السينات على شرط أن يتقاطعا فى نقطة (٨ ، — ١١) وأوجد البعدين الاحداثيين لنقطة تقاطعهما الأخرى

٥ ارسم على ورق المربعات دائرتين مركز إحداهما النقطة (١٥ ، ٠) ومركز الأخرى النقطة (—٦ ، ٠) على شرط أن تتقاطعا فى نقطة (٠ ، ٨) واوجد طول كل من نصفى القطرين والبعدين الاحداثيين لنقطة التقاطع الأخرى

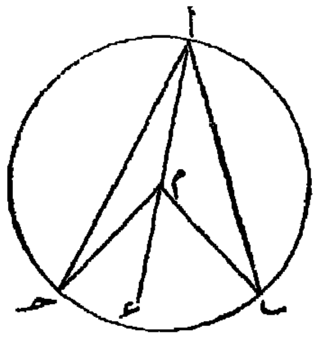
٦ ارسم مثلثا متساوى الساقين م ا ب زاوية رأسه م = ٨٠° ثم ارسم دائرة مركزها م ونصف قطرها م ا وافرض على المحيط النقط حـ ، ء ، هـ على شرط أن تكون كلها فى جهة ا ب التى فيها المركز ثم قس كلا من الزوايا حـ ، ء ، هـ التى يقابلها الوتر ا ب فاذا غيرت مقدار ∠ م وقست الزوايا حـ ، ء ، هـ كما تقدم فما هى النتيجة التى تصل اليها

فى الزوايا المرسومة فى قطعة من الدائرة
والزوايا المركزية والمحيطية

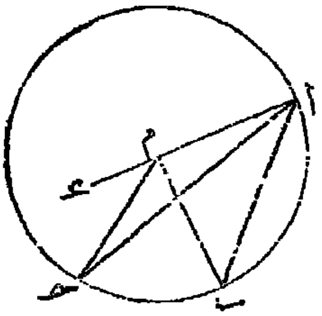
تنبيـــه — الزوايا المركزية ما كان رأسها فى مركز الدائرة وضـلعاها نصفى قطرين والمحيطية ما كان رأسها على المحيط وضلعاها وترين

نظرية ٣٨

الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس المحصور بين ضلعيها



(شكل ١)



(شكل ٢)

اذا فرضنا أن ا ب ح دائرة مركزها م وأن ب م ح زاوية مركزية ، ب ا ح زاوية محيطيـة مشتركة معها فى القوس ب ح المحصور بين ضلعيها

فانه يطلب إثبـات ان ∠ ب م ح = ٢ ∠ ب ا ح

لذلك نصل ا م ونمده الى ء

البرهان — فى Δ م ا ب

من حيث ان م ب = م ا

∴ ∠ م ا ب = ∠ م ب ا

∴ ∠ م ا ب + ∠ م ب ا = ٢ ∠ م ا ب

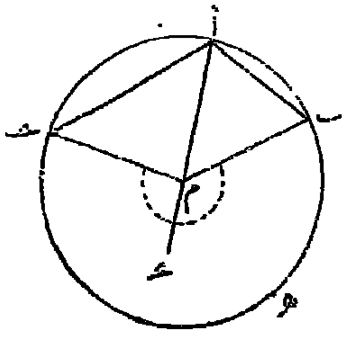
لكن ∠ ب م ء الخارجـة = ∠ م ا ب + ∠ م ب ا

∴ ∠ ب م ء = ٢ ∠ م ا ب

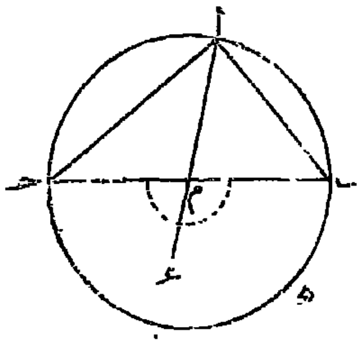
وكذلك يمكن إثبات أن ∠ ح م ء = ٢ ∠ م ا ح

وبجمع هذين الناتجين فى (الشكل ١) وايجاد الفرق بينهما فى (الشكل ٢)

ينتج أن ∠ ب م ح = ٢ ∠ ب ا ح وهو المطلوب



(شكل ٤)



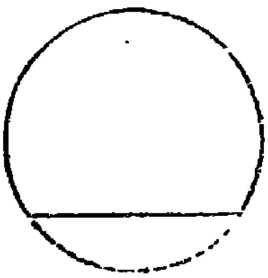
(شكل ٣)

ملاحظة — اذا كان القوس ب هـ حـ المرسومة عليه الزاوية ب ا حـ نصف محيط كما فى (شكل ٣) كانت الزاوية المركزية ب م حـ مستقيمة واذا كان أكبر من نصف محيط كما فى (شكل ٤) كانت الزاوية ب م حـ منعكسة

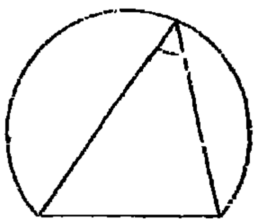
والبرهان المتقدم على (شكل ١) يمكن تطبيقه هنا من غير تغيير فيه مطلقا

أى أن ∠ ب م حـ = ٢ ∠ ب ا حـ المشتركة معها فى القوس ب هـ حـ المحصور بين ضلعيها سواء كان طول هذا القوس مساويا نصف المحيط أو أصغر منه أو أكبر منه

تعاريف



القطعة هى جزء الدائرة المحصور بين قوس ووتر ويسمى الوتر أحيانا بقاعدة القطعة

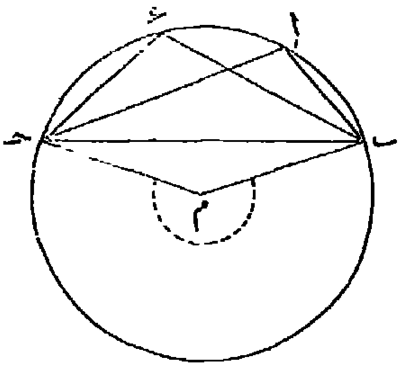


الزاوية المرسومة فى القطعة هى ما كان رأسها على قوس القطعة وضلعاها منتهيين بطرفى وترها

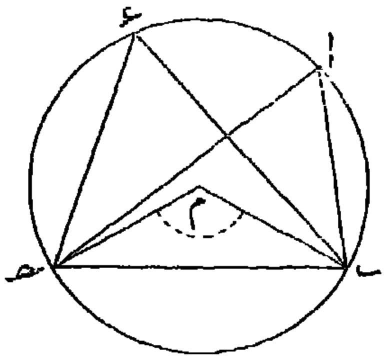
تنبيه — تقدم فى نظرية ٣٢ أنه يمكن أن يمر بكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة محيط دائرة أما رسم دائرة تمر بأربع نقط فيستلزم شروطا خاصة

نظرية ٣٩

الزوايا المرسومة فى قطعة واحدة من الدائرة متساوية



(شكل ٢)



(شكل ١)

اذا فرضنا أن الزاويتين ب ا حـ ، ب ء حـ مرسومتان فى قطعة واحدة ب ا ء حـ من الدائرة التى مركزها م

فانه يطلب إثبات أن ∠ ب ا حـ = ∠ ب ء حـ

لذلك نصل ب م ، م حـ

البرهان — ∠ ب م حـ مركزية ، ∠ ب ا حـ محيطية مشتركة معها فى القوس ب حـ

∴ ∠ ب م حـ = ٢ ∠ ب ا حـ (نظرية ٣٨)

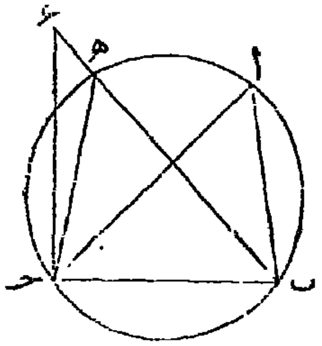
وكذا ∠ ب م حـ = ٢ ∠ ب ء حـ

∴ ∠ ب ا حـ = ∠ ب ء حـ

تنبيه — ربما كانت القطعة المرسومة فيها الزاوية أكبر من نصف الدائرة (شكل ١) أو أصغر منه (شكل ٢) ففى الحالة الثانية تكون الزاوية المركزية ب م حـ منعكسة لكنها لاتزال تساوى ضعف كل من الزاويتين المحيطيتين المرسومتين فى القطعة وذلك بتطبيق نفس البرهان المتقدم فى نظرية ٣٨

عكس نظرية ٣٩

الزوايا المتساوية المرسومة على قاعدة واحدة فى جهة واحدة منها تكون رؤوسها على قوس دائرة هذه القاعدة وتر فيها



اذا فرضنا أن ب ا حـ ، ب ء حـ زاويتان متساويتان ومرسومتان على قاعدة واحدة ب حـ وفى جهة واحدة منها

فانه يطلب إثبات أن ا ، ء تقعان على قوس دائرة يكون ب حـ وترا فيها

لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط ا ، ب ، حـ فان مر بالنقطة ء ثبت المطلوب وإلا فانه يقطع المستقيم ب ء إن كانت ء خارج الدائرة أو امتداده إن كانت ء داخلها

فاذا كانت هـ نقطة تقاطع المحيط بالمستقيم ب ء أو بامتداده نصل حـ هـ

البرهان ∠ ب هـ حـ = ∠ ب ا حـ لأنهما مرسومتان فى قطعة واحدة

لكن ∠ ب ا حـ = ∠ ب ء حـ فرضا

∴ ∠ ب هـ حـ = ∠ ب ء حـ

وهذا لايتأتى إلا اذا وقعت النقطة هـ على النقطة ء

∴ المحيط المار بالنقط ا ، ب ، حـ يجب أن يمر بالنقطة ء

نتيجة — المحل الهندسى لرؤوس المثلثات المرسومة على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها وزوايا رؤوسها متساوية هو قوس دائرة

تمارين على نظرية ٣٩

١ فى (شكل ١) اذا كانت ∠ ب ا حـ = ٧٤° فما مقدار كل من الزوايا ب ء حـ ، ب م حـ ، م حـ ب

٢ (فى شكل ٢) اذا فرض أن س نقطة تقاطع ب ء ، حـ ا وكانت ∠ ا س ب = ٤٠ والزاوية س ب ا = ٢٥° فما مقدار ∠ حـ ء ب وما مقدار ∠ ب م حـ المنعكسة

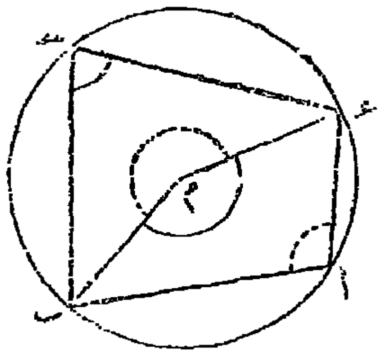
٣ (فى شكل ١) اذا كانت ∠ ب حـ ا = ٤٣° ، ∠ حـ ب ا = ٨٢° فما مقدار كل من الزوايا ب ء حـ ، م ب ا ، م حـ ا

٤ فى (شكل ٢) برهن على أن ∠ م حـ ب أقل دائما من ∠ حـ ء ب بقدر ∠ قائمة

[فى صفحة ١٨٨ تمارين أخرى على نظرية ٣٩]

نظرية ٤٠

الزاويتان المتقابلتان فى الشكل الرباعى المرسوم داخل[1] دائرة متكاملتان



اذا فرضنا أن ا ب ح د شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة ا ب ح

فانه يطلب إثبات أن

(١) ∠ د ا ب + ∠ د ح ب = ٢ ق

(٢) ∠ ا ب ح + ∠ ا د ح = ٢ ق

لذلك نفرض أن م مركز الدائرة

ونصل م ب ، م د

البرهان — ∠ د ح ب المحيطية = ½ ∠ د م ب المركزية المشتركة معها فى القوس د ا ب

وكذلك ∠ د ا ب المحيطية = ½ ∠ د م ب المركزية المنعكسة المشتركة معها فى القوس د ح ب

∴ مجموع الزاويتين د ح ب ، د ا ب = نصف مجموع الزاويتين د م ب ، د م ب المنعكسة

لكن مجموع هاتين الزاويتين الأخيرتين = ٤ ق

∴ ∠ د ح ب + ∠ د ا ب = ٢ ق

وكذلك ∠ ا ب ح + ∠ ا د ح = ٢ ق وهو المطلوب

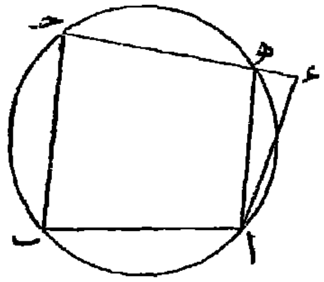
تنبيـــه — بمقارنة نظريتى ٣٩ ، ٤٠ إحداهما بالأخرى نجد فى نظرية ٣٩ أن الزوايا المرسومة فى قطعة واحدة من الدائرة متســاوية وفى نظرية ٤٠ أن الزاويتين المرسومتين فى قطعتين مترافقتين فى دائرة متكاملتان

---

(١) تقدم أن الشكل المرسوم داخل دائرة مامر محيطها برؤوسه

عكس نظرية ٤٠

اذا كانت الزاويتان المتقابلتان فى الشكل الرباعى متكاملتين أمكن أن يمر برؤوسه محيط دائرة واحد



اذا فرضنا أن ا ب حـ ء شكل رباعى فيه الزاويتان ب ، ء متكاملتان فانه يطلب إثبات أنه يمكن أن يرسم محيط دائرة واحد يمر بالنقط الأربع ا ، ب ، حـ ، ء

لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث ا ، ب ، حـ

فان مر بالنقطة الرابعة ء ثبت المطلوب والاقطع حـ ء أو امتداده فى هـ

نصل هـ ا

البرهان — من حيث ان ا ب حـ هـ شكل رباعى داخل دائرة

∴ ∠ ا هـ حـ تكمل ∠ ا ب حـ

لكن ∠ ا ء حـ تكمل ∠ ا ب حـ فرضا

∴ ∠ ا هـ حـ = ∠ ا ء حـ

وهذا لايتأتى إلا اذا وقعت هـ على ء

∴ فالدائرة التى يمر محيطها بالنقط ا ، ب ، حـ يجب أن يمر بالنقطة ء أيضا

اى أن ا ، ب ، حـ ، ء يمكن أن يمر بها محيط دائرة واحد وهو المطلوب

تمارين على نظرية ٤٠

١ ارسم فى دائرة نصف قطرها ٤ سنتمترات الشكل الرباعى ا ب حـ ء الذى فيه زاوية ا ب حـ = ١٢٦° وقس كلا من الزوايا الباقية ومن ذلك بين أن الزاويتين المتقابلتين فى الشكل الرباعى المرسوم داخل الدائرة متكاملتان

٢ برهن على نظرية ٤٠ بواسطة نظريتى ٣٩ ، ١٦ وذلك بعد أن تصل كل رأسين متقابلين فى الشكل بمستقيم

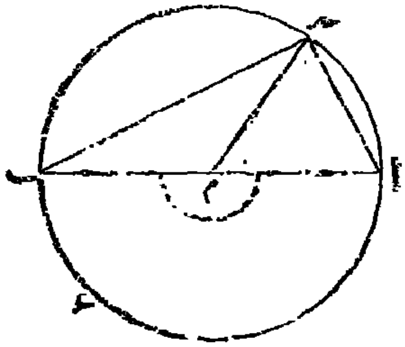
٣ اذا أمكن رسم محيط دائرة يمر برؤوس شكل متوازى الأضلاع فان هذا الشكل إما أن يكون مستطيلا أو مربعا

٤ ا ب حـ مثلث متساوى الساقين رسمنا المستقيم س ص موازيا لقاعدته ب حـ وقاطعا لساقيه فى س ، ص ...ن على أن النقط الأربع ب ، حـ ، س ، ص على محيط دائرة واحد

٥ اذا مد أحد أضلاع الشكل الرباعى المرسوم داخل الدائرة على استقامته كانت الزاوية الخارجة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة للزاوية التى مد أحد ضلعيها

نظرية ٤١

الزاوية المرســومة فى نصف الدائرة قائمة



اذا فرضنا أن ا ء ب دائرة قطرها ا ب ومركزها م وكانت ح نقطة على نصف المحيط ا ح ب

فانه يطلب إثبات أن ∠ ا ح ب قائمة

للبرهنة على ذلك طريقتان

الأولى — من حيث ان ∠ ا ح ب محيطية وزاوية ا م ب المســتقيمة مركزية وكلاهما مشترك فى القوس ا ء ب المحصور بين ضلعيهما

∴ ∠ ا ح ب = نصف الزاوية المستقيمة ا م ب

لكن الزاوية المستقيمة ا م ب = ٢ ق

∴ ∠ ا ح ب = ق وهو المطلوب

الثـانية — نَصل م ح

فمن حيث ان م ا = م ح

∴ ∠ م ح ا = ∠ م ا ح (نظرية ٥)

ومن حيث ان م ب = م ح

∴ ∠ م ح ب = ∠ م ب ح

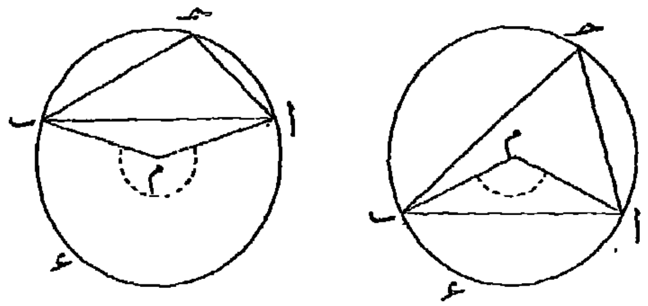
وبالجمع يحدث ∠ ا ح ب = ∠ م ا ح + ∠ م ب ح

ومن حيث ان مجموع زوايا المثلث ا ح ب = قائمتين

∴ ∠ ا ح ب = نصــف زاويتين قائمتين

أى = قائمة وهو المطلوب

نتيجة — الزاوية المرسومة فى قطعة أكبر من نصف الدائرة حادة والتى فى قطعة أصغر من نصف الدائرة منفرجة



الزاوية المحيطية ا ح ب تساوى نصف المركزية ا م ب لاشتراكهما فى قوس واحد ا ى ب

أوّلا — اذا كانت القطعة ا ح ب أكبر من نصف الدائرة

فالقوس ا ى ب أصغر من نصف المحيط

∴ ∠ ا م ب أصغر من قائمتين

∴ ∠ ا ح ب « « قائمة

ثانيا — اذا كانت القطعة ا ح ب أصغر من نصف الدائرة

فالقوس ا ى ب أكبر من نصف المحيط

∴ ∠ ا م ب أكبر من قائمتين

∴ ∠ ا ح ب « « قائمة

تمارين على نظرية ٤١

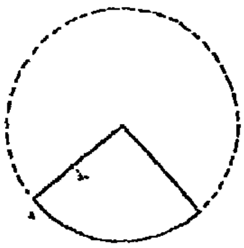
١ المعلوم مثلث قائم الزاوية والمطلوب إثبات أن محيط الدائرة التى قطرها وتر هذا المثلث يمر برأس الزاوية القائمة

٢ دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب برهن على أنه اذا رسمنا من ا القطر ا ح فى احدى الدائرتين والقطر ا ى فى الاخرى كانت النقط ح ، ب ، ى على استقامة واحدة

٣ اذا رسمنا دائرة قطرها أحد ساقى مثلث متساوى الساقين فان محيطها يمر بمنتصف قاعدته

٤ الدائرتان اللتان قطراهما ضلعا مثلث تتقاطعان فى نقطة على الضلع الثالث أو على امتداده

٥ المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمنتصف مستقيم طوله معين وطرفاه على مستقيمين متعامدين يتحرك بينهما

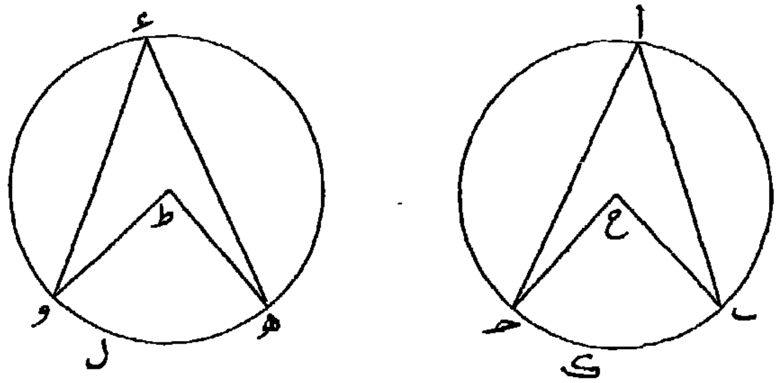


٦ المعلوم دائرة والمطلوب ايجاد المحل الهندسى لمنتصفات أوتارها المارة بنقطة معلومة سواء كانت هذه النقطة داخل الدائرة أو خارجة عنها أو على محيطها

تعريف — قطاع الدائرة هو جزؤها المحدود بنصفى قطرين والقوس المحصور بينهما

نظرية ٤٢

في الدوائر المتساوية اذا كانت الزوايا المركزية أو المحيطية متساوية كانت أقواسها متساوية



اذا فرضنا أن ا ب ح ، ى هـ و دائرتان متساويتان وأن الزاويتين المركزيتين ب ع ح ، هـ ط و متساويتان وعلى ذلك فالزاويتان المحيطيتان ب ا ح ، هـ ى و متساويتان (نظرية ٣٨)

فانه يطلب إثبات أن القوس ب ك ح = القوس هـ ل و

البرهان — نطبق الدائرة ا ب ح على الدائرة ى هـ و بحيث يقع المركز ع على المركز ط ونصف القطر ع ب على نصف القطر ط هـ

فمن حيث ان ∠ ب ع ح = ∠ هـ ط و

∴ يقع ع ح على ط و ولتساوى أنصاف الأقطار تقع ب على هـ ، ح على و وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

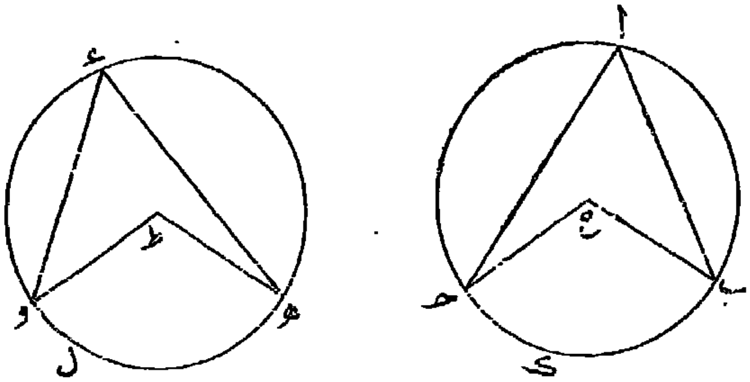
∴ القوس ب ك ح ينطبق على القوس هـ ل و وهو المطلوب

نتيجة — في الدوائر المتساوية تتساوى القطاعات اذا تساوت زواياها

ملاحظة — من الواضح أن النظريات الخاصة بالأقواس والزوايا والأوتار الواقعة في الدوائر المتساوية يمكن إثبات صحتها فيما لو كانت هذه الأقواس والزوايا والأوتار واقعة في دائرة واحدة

نظرية ٤٣

في الدوائر المتساوية تتساوى الزوايا المركزية أو المحيطية اذا تساوت أقواسها



نفرض أن ا ب حـ ، ء هـ و دائرتان متساويتان

وأن القوس ب ك حـ = القوس هـ ل و

ويراد إثبات أن الزاوية المركزية ب ع حـ = الزاوية المركزية هـ ط و

والزاوية المحيطية ب ا حـ = الزاوية المحيطية هـ ء و

البرهان — نطبق الدائرة ا ب حـ على الدائرة ء هـ و على شرط أن يقع المركز ع على المركز ط ، ع ب على ط هـ

فلكون أنصاف أقطار الدائرتين متساوية

∴ تقع ب على هـ وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

ولكون القوس ب ك حـ = القوس هـ ل و فرضا

∴ تقع حـ على و

وبذا ينطبق ع حـ على ط و

∴ ∠ ب ع حـ = ∠ هـ ط و

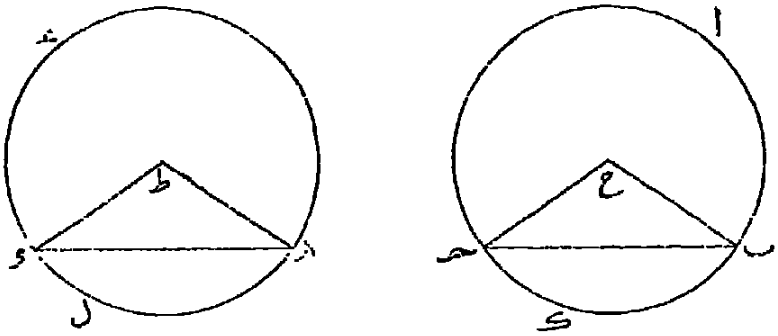
ومن حيث ان الزاوية المحيطية ب ا حـ = $\frac{1}{2}$ المركزية ب ع حـ

وكذلك ∠ هـ ء و = $\frac{1}{2}$ ∠ هـ ط و

∴ ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ء و وهو المطلوب

نظرية ٤٤

فى الدوائر المتساوية تتساوى الأقواس اذا تساوت أوتارها القوس الأكبر يساوى الأكبر والأصغر يساوى الأصغر



نفرض ان ا ب ح ، د هـ و دائرتان متساويتان مركزاهما ع ، ط

وأن الوتر ب ح = الوتر هـ و

ويطلب إثبات أن القوس الأكبر ب ا ح = القوس الأكبر هـ د و

والقوس الأصغر ب ك ح = القوس الأصغر هـ ل و

لذلك نصل ب ع ، ع ح ، هـ ط ، ط و

البرهان — فى Δ ب ع ح ، Δ هـ ط و

من حيث ان { ب ع = هـ ط (لأنهما نصفا قطرى دائرتين متساويتين)

، ع ح = ط و للسبب عينه

، ب ح = هـ و فرضاً }

∴ ∠ ب ع ح = ∠ هـ ط و (نظرية ٧)

∴ القوس ب ك ح = القوس هـ ل و (نظرية ٤٢)

أى أن القوسين الأصغرين متساويان .

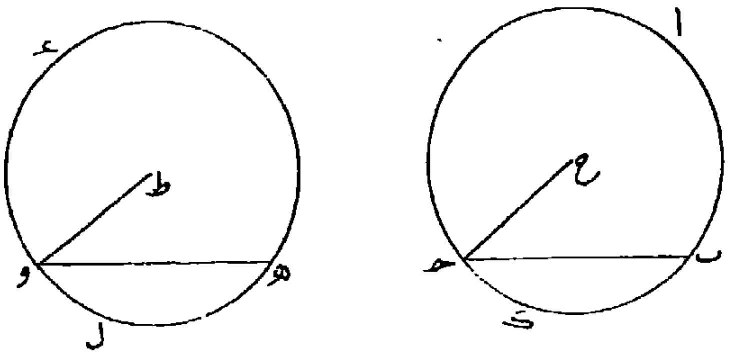
ومن حيث ان المحيط ا ب ك ح = المحيط د هـ ل و

∴ القوس الباقى ب ا ح = القوس الباقى هـ د و

اى أن القوسين الأكبرين متساويان وهو المطلوب

نظرية ٤٥

في الدوائر المتساوية تتساوى الاوتار اذا تساوت أقواسها



اذا فرضنا أن ا ب حـ ، ى هـ و دائرتان متساويتان

مركزاهما ع ، ط وأن القوس ب ى حـ = القوس هـ ل و

فانه يطلب إثبات أن الوتر ب حـ = الوتر هـ و

لذلك نصل ع حـ ، ط و

البرهان — نطبق الدائرة ا ب حـ على الدائرة ى هـ و على شرط أن تقع ع على ط ، ع حـ على ط و

فمن حيث ان أنصاف الأقطار متساوية

∴ تقع حـ على و وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

ومن حيث ان القوس ب ى حـ = القوس هـ ل و

تقع ب على هـ

∴ ينطبق الوتر ب حـ على الوتر هـ و وهو المطلوب

تمارين على الزوايا فى الدائرة

١ ﻫ نقطة مفروضة على قوس القطعة التى وترها ا ب برهن على أن مجموع الزوايتين ﻫ ب ا ، ﻫ ا ب ثابت

٢ ا ب ، حـ ى وتران فى دائرة متقاطعان فى س برهن على أن زوايا ∆ ا س ى = زوايا ∆ حـ س ب

٣ دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب رسمنا المستقيم س ا ص يمر بالنقطة ا وينتهى طرفاه س ، ص بالمحيطين برهن على أنه اذا وصل س ب ، ص ب فمقدار ∠ ب ثابت فى أى وضع للمستقيم س ا ص

٤ دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب رسمنا المستقيمين هـ ا و ، س ا ص مارين بالنقطة ا وطرفا كل منهما على المحيطين برهن على أن القوسين هـ س ، و ص يقابلان زاويتين متساويتين رأس كل منهما نقطة ب

٥ ﻫ نقطة ما مفروضة على قوس قطعة وترها ا ب نصفت الزاويتان ﻫ ا ب ، ﻫ ب ا بمستقيمين تقاطعا فى م والمطلوب ايجاد المحل الهندسى لهذه النقطة م

٦ اذا تقاطع وتران داخل دائرة فان كل زاوية حادثة من تقاطعهما تساوى الزاوية المركزية المرسومة على نصف مجموع القوسين المحصور أحدهما بين ضلعى هذه الزاوية الحادثة والثانى بين امتداد هذين الضلعين

٧ اذا تقاطع وتران خارج دائرة فان الزاوية المحصورة بينهما تساوى الزاوية المركزية المرسومة على نصف الفرق بين القوسين المحصورين بينهما

٨ اذا تقاطع وتران داخل دائرة وكانا متعامدين فان مجموع كل قوسين متقابلين محصورين بينهما يساوى نصف المحيط

٩ ا ب وترما فى دائرة معلومة ، ﻫ نقطة تتحرك على أحد القوسين المنقسم اليهما المحيط بهذا الوتر والمطلوب إثبات أن منصف زاوية ا ﻫ ب يقابل القوس الآخر دائما فى نقطة ثابتة

١٠ اذا فرضت نقطة مثل ا على محيط دائرة معلومة ورسم منها الوتران ا ب ، ا حـ وكانت ى منتصف القوس الأصغر ا ب ، هـ منتصف القوس الأصغر ا حـ ثم وصل المستقيم ى هـ فقطع ا ب فى س ، ا حـ فى ص فانه يطلب إثبات أن ا س = ا ص

١١ ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة نصفنا زواياه بمستقيمات تقابل المحيط فى س ، ص ، ع برهن على أن زوايا المثلث س ص ع تساوى على الترتيب

$$٩٠ - \frac{ا}{٢} ، ٩٠ - \frac{ب}{٢} ، ٩٠ - \frac{حـ}{٢}$$

١٢ اذا فرضنا نقطة مثل ق على أحد محيطى دائرتين متقاطعتين فى ا ، ب ومددنا منها الى هاتين النقطتين مستقيمين فانه يطلب إثبات أنه اذا مد هذان المستقيمان على استقامتهما فانهما يحصران بينهما من المحيط الآخر قوسا مقداره ثابت مهما تغير وضع النقطة ق

١٣ يتساوى المستقيمان الواصلان بين طرفى وترين متوازيين فى دائرة سواء كان الطرفان فى جهة واحدة او فى جهتين مختلفتين

١٤ ا احدى نقطتى تقاطع دائرتين متساويتين مر بها مستقيمان ينتهى طرفا كل منهما بالمحيطين فاذا كان أحد المستقيمين حـ ا ى والآخر س ا ص فبرهن على أن الوتر حـ س = الوتر ى ص

١٥ دائرتان متقاطعتان أثبت أنه اذا مر بنقطتى التقاطع مستقيمان متوازيان ومنتهيان بالمحيطين كان المستقيمان الواصلان بين طرفى هذين المتوازيين من جهة واحدة متساويين

١٦ دائرتان متساويتان ومتقاطعتان فى ا ، ب برهن على أنه اذا رسم المستقيم حـ ا ى مارًا بالنقطة ا ومنتهيا بالمحيطين كان ب حـ = ب ى

١٧ ا ب حـ مثلث متساوى الساقين مرسوم داخل دائرة نصفت زاويتا القاعدة بمستقيمين مقابلان المحيط فى س ، ص برهن على أنه يجب أن يوجد فى الشكل ب ص ا س حـ أربعة أضلاع متساوية

واذكر العلاقة التى يجب أن ترتبط بها زوايا المثلث ا ب حـ حتى يصير الشكل ب ص ا س حـ متساوى الأضلاع

١٨ ا ب حـ ى شكل رباعى مرسوم داخل دائرة مد الضلعان المتقابلان ا ب ، ى حـ على استقامتهما فتقابلا فى هـ والضلعان الآخران حـ ب ، ى ا فتقابلا فى ع فاذا تقاطعت الدائرتان المرسومتان على المثلثين هـ ب حـ ، ع ا ب فى نقطة و فان النقط الثلاث هـ ، و ، ع يجب أن تكون على استقامة واحدة

١٩ النقط س ، ص ، ع منتصفات أضلاع مثلث والنقطة ى موقع العمود النازل من الرأس على القاعدة برهن على أنه يجب أن يمر بالنقط الأربع س ، ص ، ع ، ى محيط دائرة واحد

[راجع صفحة ٦٩ تمرين ٢ وصفحة ٨٨ عملية ١٠]

٢٠ برهن بواسطة المسألة السابقة على أن منتصفات أضلاع المثلث ومواقع الأعمدة النازلة من رؤوسه على الأضلاع المقابلة لها يجب أن تكون كلها على محيط دائرة واحد

٢١ اذا رسمت عدة مثلثات على قاعدة واحدة فى جهة واحدة منها وكانت زوايا رؤوسها متساوية بأن ساوت زاوية معلومة فان جميع منصفات هذه الزوايا تتقابل فى نقطة واحدة

٢٢ ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ونقطة هـ منتصف القوس ب حـ غير الذى فيه ا فاذا رسمنا من هـ القطر هـ ى كانت ∠ ى هـ ا مساوية نصف الفرق بين الزاويتين ب ، حـ

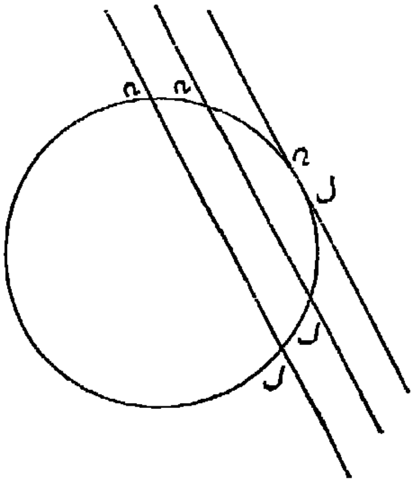
فى التماس

(تعاريف ومبادئ أولية)

١ قاطع الدائرة هو المستقيم الذى يقطع محيطها فى نقطتين

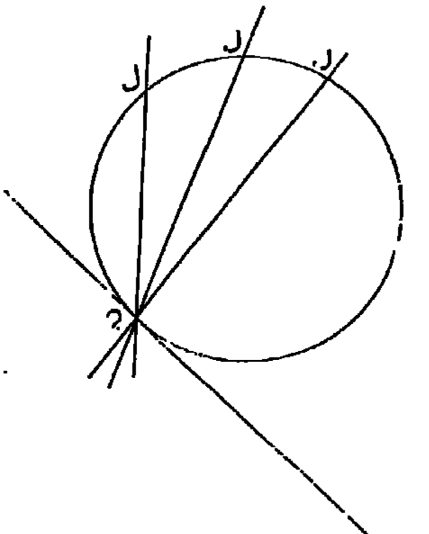
٢ اذا تحرك قاطع الدائرة بحيث تقترب نقطتا التقاطع كل من الأخرى شيئا فشيئا حتى تتحدا فان القاطع فى هذا الوضع النهائى يصير ماسا للدائرة فى هذه النقطة التى تسمى نقطة التماس

مثال ذلك



اوّلا — اذا فرضنا أن مستقيما قطع الدائرة فى النقطتين ل ، ى وتصورنا أنه يبتعد عن المركز شيئا فشيئا موازيا لنفسه فان النقطتين ل ، ى تقتربان كلما ابتعد القاطع عن مركز الدائرة حتى يأتى وضع فيه تتحدان

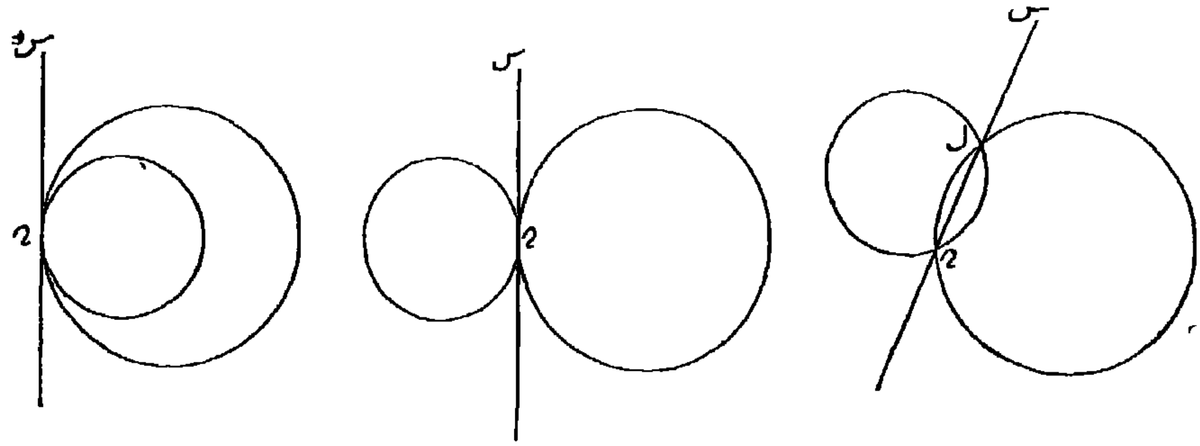
أى أن النقطتين ل ، ى تصيران فى الوضع النهائى نقطة واحدة ويصير القاطع حينئذ ماسا للدائرة فى هذه النقطة



ثانيا — اذا فرضنا أن المستقيم قطع الدائرة فى النقطتين ل ، ى وتصورنا دورانه حول نقطة ى وهى ثابتة فان نقطة ل أثناء الدوران تتحرك على المحيط مقتربة شيئا فشيئا من ى حتى يأتى وضع فيه تقع ل على ى ويصير القاطع حينئذ ماسا للدائرة

ومن حيث ان القاطع لايشترك مع المحيط الا فى نقطتين فمن الواضح أن المماس لايشترك معه إلا فى نقطة واحدة هى نقطة التماس التى فيها تتحد نقطتا التقاطع ومن ذلك نستخلص التعريف الآتى

٣ مماس الدائرة هو المستقيم الذى لايشترك مع المحيط إلا فى نقطة واحدة مهما امتد



(شكل ٣) (شكل ٢) (شكل ١)

٤ اذا تقاطعت دائرتان فى نقطتين ل ى (شكل ١) وتصورنا تحرك أحد المحيطين حول ى بحيث تكون هذه النقطة ثابتة وبحيث ان النقطة الأخرى ل تقترب منها شيئا فشيئا فانه يأتى وضع فيه تقع ل على ى (شكلى ٢ و ٣) ويقال للدائرتين حينئذ انهما متماستان فى نقطة ى

ومن حيث ان الدائرتين لايمكن أن تتقاطعا فى أكثر من نقطتين فالدائرتان المتماستان لايمكن أن تشتركا إلا فى نقطة واحدة هى نقطة التماس التى فيها تتحد نقطتا تقاطع المحيطين وعلى ذلك لايقال ان الدائرتين متماستان إلا اذا اشتركتا فى نقطة واحدة فقط

تنبيــه — اذا كانت احدى الدائرتين المتماستين خارج الدائرة الأخرى (شكل ٢) يقال انهما متماستان من الخارج واذا كانت احداهما داخل الأخرى فمتماستان من الداخل (شكل ٣)

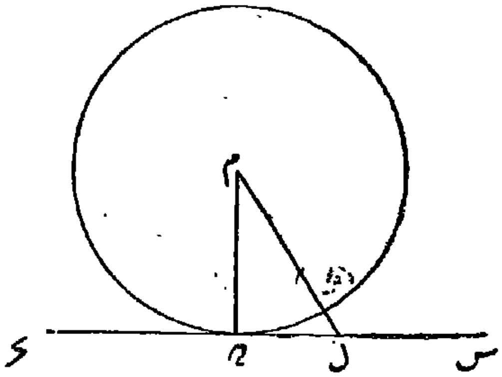
استنتاج من التعريفين ٢ و ٤

اذا فرضنا أن س ل ى وتر مشترك بين دائرتين متقاطعتين (شكل ١) وأن احدى الدائرتين تتحرك حول ى بحيث تكون هذه النقطة ثابتة فان المستقيم س ى فى حال وقوع ل على ى يمر بنقطتين متحدتين ولا يزال كل منهما على محيطى الدائرتين المذكورتين (شكلى ٢ و ٣) وعلى ذلك يكون هذا المستقيم مماسا لكل من الدائرتين وحينئذ

فلكل دائرتين متماستين مماس مشترك فى نقطة تماسهما

نظرية ٤٦

مماس الدائرة فى نقطة ما من المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



اذا فرضنا أن س ه يمس الدائرة التى مركزها م فى نقطة ه

فانه يطلب إثبات ان س ه عمود على م ه

البرهان — نفرض نقطة ما مثل ل على س ه ونصل م ل

فمن حيث ان ه س مماس للدائرة فى ه فكل نقطة غيرها يجب أن تكون خارج الدائرة

∴ م ل أكبر من نصف القطر م ه

ومن حيث ان أى نقطة أخرى غير ه على المستقيم ه س خارجة عن محيط الدائرة

∴ م ه أصغر الأبعاد التى يمكن رسمها من م الى ه س

فيكون م ه عمودا على ه س (نظرية ١٢ نتيجة ١) وهو المطلوب

نتيجة ١ — من حيث انه لايمكن أن يقام إلا عمود واحد من ه على م ه ينتج أنه لايمكن أن يمدّ إلا مماس واحد لدائرة من نقطة مفروضة على محيطها

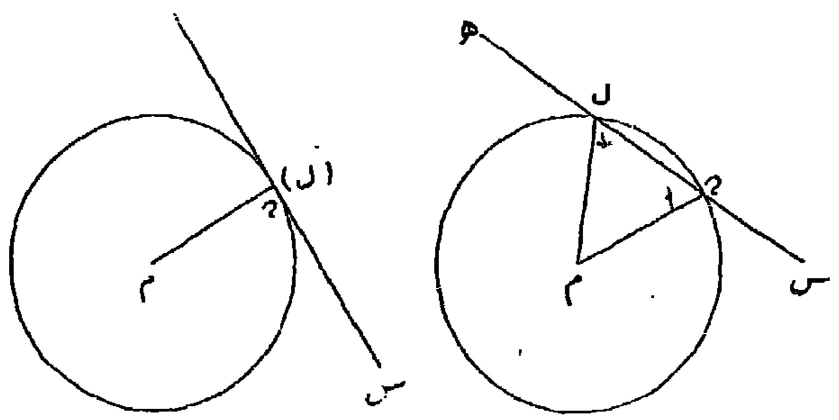
نتيجة ٢ — من حيث انه لايمكن أن يقام إلا عمود واحد من ه على س ه ينتج أن العمود المقام على المماس من نقطة التماس لابد أن يمر بالمركز

نتيجة ٣ — من حيث انه لايمكن أن ينزل إلا عمود واحد من م على المستقيم س ه ينتج أن نصف القطر العمودى على المماس لا بد أن يمر بنقطة التماس

نظرية ٤٦

(طريقة نهاية الأوضاع)

مماس الدائرة فى نقطة ما من المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



(شكل ٢) (شكل ١)

اذا فرضنا أن ن نقطة على محيط دائرة مركزها م

فانه يطلب إثبات أن مماس هذه الدائرة فى ن عمود على نصف القطر م ن

لذلك نرسم المستقيم هـ ل ن س قاطعا للدائرة فى ل ، ن (شكل ١) ثم نصل م ل ، م ن

البرهان — من حيث ان م ن = م ل

∴ ∠ م ل ن = ∠ م ن ل

∴ مكملتا هاتين الزاويتين متساويتان

أى أن ∠ م ل هـ = ∠ م ن س

وهذا حقيق مهما اقتربت ل من ن

وعلى ذلك اذا دار القاطع ل ن حول نقطة ن بحيث تكون هذه النقطة ثابتة وبحيث تقترب منها ل شيئا فشيئا حتى تقع عليها يحدث فى ذلك الوضع النهائى أن

(١) القاطع هـ س يمس الدائرة فى ن
(٢) م ل ينطبق على م ن } (شكل ٢)

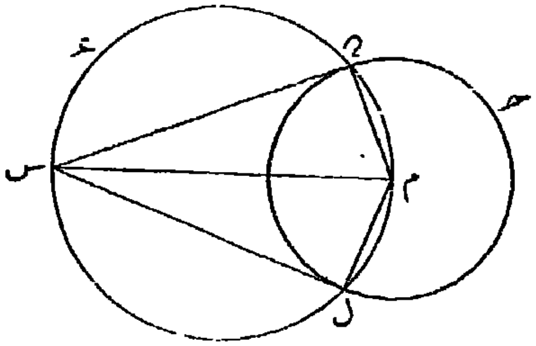
فتصير بذلك الزاويتان المتساويتان م ل هـ ، م ن س متجاورتين

∴ م ن عمود على هـ س وهو المطلوب

تنبيه — الطريقة المستعملة فى هذا البرهان تعرف بطريقة نهاية الأوضاع

نظرية ٤٧

يمكن أن يمد من نقطة خارج دائرة مماسان لمحيطها



اذا فرضنا أن ل ح ى دائرة مركزها م ، س نقطة خارجة عنها

فانه يطلب إثبات أنه يمكن مد مماسين من س الى المحيط

العمل نصل م س ونرسم الدائرة م س ء التى قطرها م س فهذه الدائرة تقطع الدائرة المعلومة فى النقطتين ل ، ى

نصل س ل ، س ى ، م ل ، م ى

البرهان — من حيث ان كلا من الزاويتين س ل م ، س ى م مرسومة فى نصف دائرة

∴ س ل عمود على م ل ، س ى عمود على م ى

∴ س ل ، س ى مماسان للدائرة فى ل ، ى (نظرية ٤٦) وهو المطلوب

نتيجة — اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسان لها كانا متساويين ومقابلين لزاويتين مركزيتين متساويتين

لأنه فى المثلثين س ل م ، س ى م

من حيث ان { ∠ س ل م = ∠ س ى م بالقيام
، س م مشترك
، م ل = م ى }

∴ س ل = س ى

، ∠ س م ل = ∠ س م ى (نظرية ١٨)

تمـــارين على التماس

(مسائل عددية وتخطيطية)

١ ارسم دائرتين متحدتين في المركز نصف قطر إحداهما ٥ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٣ سنتيمترات ثم ارسم عدّة أوتار في الدائرة الكبرى تمس محيط الصغرى واستخرج أطوالها بالحساب وقسها و برهن على تساويها

٢ ارسم عدّة أوتار طول كل منها ١,٦ من البوصات داخل دائرة نصف قطرها بوصة و برهن على أن جميعها تمس دائرة متحدة في المركز مع الأولى ثم أوجد نصف قطر هذه الدائرة

٣ دائرتان متحدتا المركز قطر إحداهما ١٠ سنتيمترات وقطر الأخرى ٥ سنتيمترات أوجد طول اى وتر في الدائرة الخارجة يمس محيط الداخلة لأقرب مليمتر ثم حقق الناتج بالقياس

٤ في شكل نظرية ٤٧ اذا فرض أن م ل = ١,٢٥ من الأمتار ، م س = ٣,٢٥ من الأمتار فما طول كل من المماسين المرسومين من س ارسم الشكل (بمقياس سنتيمترين لكل متر) وقس لأقرب درجة الزاويتين اللتين رأس كل منهما المركز م واللتين يقابلان المماسين المذكورين

٥ دائرة نصف قطرها ١,٤ من السنتيمترات ، س نقطة خارجها رسم منها مماسان للمحيط وكان طول كلٍ منهما ٤,٨ من السنتيمترات ما بعد س عن مركز الدائرة ارسم الشكل وحقق الناتج بالقياس

(مسائل نظرية)

٦ مركز الدائرة التي يمسها مستقيمان متقاطعان يقع على منصف الزاوية المحصورة بينهما

٧ ا ب ، ا حـ مماسان لمحيط دائرة مركزها م برهن على أن ا م ينصف الوتر ب حـ الواصل بين نقطتي التماس و يكون عمودا عليه

٨ في شكل نظرية ٤٧ اذا وصلنا المستقيم ل ق حدث أن ∠ ل س ق = ٢ ∠ م ل ق

٩ اذا رسمنا مماسا لمحيط دائرة يقطع مماسين آخرين متوازيين فان جزء هـذا المماس المحصور بين المماسين المتوازيين يقابل زاوية قائمة رأسها مركز الدائرة

١٠ قطر الدائرة ينصف جميع الأوتار الموازية لأحد المماسين المرسومين من طرف هذا القطر

١١ المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس مستقيما معلوما فى نقطة مفروضة عليه

١٢ المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس كلا من مستقيمين متوازيين غير محدودين

١٣ المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس كلا من مستقيمين متقاطعين غير محدودين

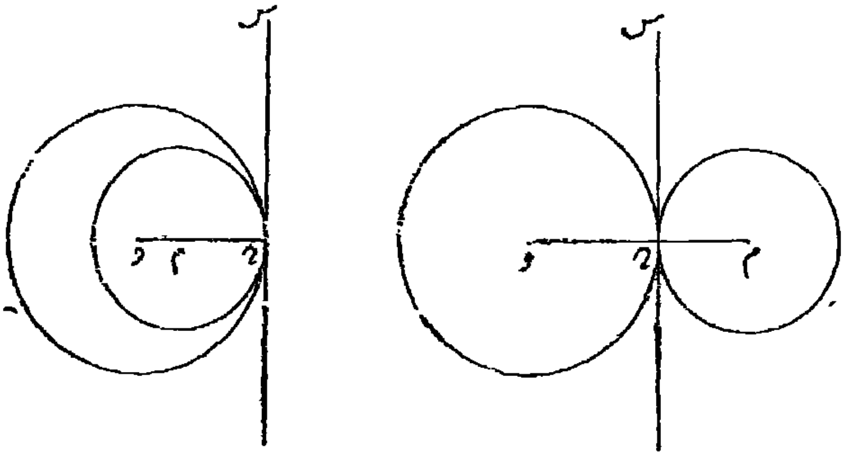
١٤ اذا رسم أى شكل رباعى خارج[١] دائرة فان مجموع كل ضلعين متقابلين يساوى مجموع الضلعين الآخرين أذكر عكس هذه النظرية و برهن عليه

١٥ اذا رسم أى شكل رباعى خارج دائرة فان الزاويتين المركزيتين المقابلتين لضلعين متقابلين من أضلاع الشكل متكاملتان

(١) الشكل المرسوم خارج الدائرة ما كانت أضلاعه ماسة لمحيطها

نظرية ٤٨

اذا تماس محيطا دائرتين كانت نقطة التماس على خط المركزين



اذا فرضنا أن الدائرتين اللتين مركزاهما م ، و متماستان فى ك

فانه يطلب إثبات أن هذه النقطة احدى نقط المستقيم م و

لذلك نصل م ك ، و ك

البرهان — من حيث ان الدائرتين متماستان فى ك فلهما مماس مشترك فى هذه النقطة (صفحة ١٩١) وليكن ك س

ومن حيث ان كلا من نصفى القطرين م ك ، و ك ماز بنقطة التماس

∴ كل من م ك ، و ك عمود على ك س

∴ م ك ، و ك على استقامة واحدة (نظرية ٢)

أى أن ك على خط المركزين وهو المطلوب

نتيجة ١ — اذا تماست دائرتان من الخارج فان البعد بين مركزيهما يساوى مجموع نصفى القطرين

نتيجة ٢ — اذا تماست دائرتان من الداخل فان البعد بين مركزيهما يساوى الفرق بين نصفى القطرين

تمارين على الدوائر المتماسة

(مسائل عددية وتخطيطية)

١ ارسم دائرتين البعد بين مركزيهما ٢,٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأولى ٣,٤ من السنتيمترات والثانية ١,٨ من السنتيمترات . لمَ يتماسان وأين نقطة تماسهما

واذا كان البعد بين مركزى هاتين الدائرتين ١,٦ من السنتيمترات فبرهن على انهما يتماسان واذكر الفرق بين هذه الحالة والحالة المتقدمة

٢ ارسم المثلث ا ب ح الذى ضلعه آ = ٨ سنتيمترات ، ب = ٧ سنتيمترات ، ح = ٦ سنتيمترات ثم اركز فى رؤوسه ا ، ب ، ح وارسم دوائر أنصاف أقطارها على الترتيب ٢,٥ من السنتيمترات ، ٣,٥ من السنتيمترات ، ٤,٥ من السنتيمترات وبرهن على أنها تماس مثنى ٢

٣ ا ب ح مثلث قائم الزاوية فى ح ضلعه آ = ٨ سنتيمترات ، ب = ٦ سنتيمترات ركز فى رأسه ا ورسم دائرة نصف قطرها ٧ سنتيمترات ماطول نصف قطر الدائرة التى مركزها ب والتى يجب أن تمس الدائرة الأولى

٤ ا ، ب مركزا دائرتين ثابتتين متماستين من الداخل ، ى مركز أى دائرة أخرى تمس الدائرة الكبرى من الداخل والصغرى من الخارج برهن على أن ا ى + ب ى ثابت

وإذا كان نصفا قطرى الدائرتين الثابتتين ٥ سنتيمترات ، ٣ سنتيمترات فانه يطلب تحقيق الناتج بتغيير موضع المركز ى

٥ ا ب مستقيم طوله ٤ بوصات نصفناه فى ح ورسمنا على كل من ا ب ، ا ح ، ح ب نصف محيط دائرة بين أن نصف قطر الدائرة المحصورة بين ثلاثة أنصاف المحيطات ماسة كلا منها يجب أن يكون $\frac{٢}{٣}$ البوصة

(مسائل نظرية)

٦ اذا رسمنا مستقيما يمر بنقطة تماس دائرتين مركزاهما ا ، ب ويقطع الأولى فى ل والثانية فى ى فبرهن على أن نصفى القطرين ا ل ، ب ى متوازيان

٧ اذا رسم مستقيم يمر بنقطة تماس دائرتين متماستين من الخارج وينتهى بالمحيطين فبرهن على ان المماسين للدائرتين من طرفى المستقيم المذكور متوازيان

٨ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر

(أولا) التى تمس دائرة معلومة فى نقطة معلومة

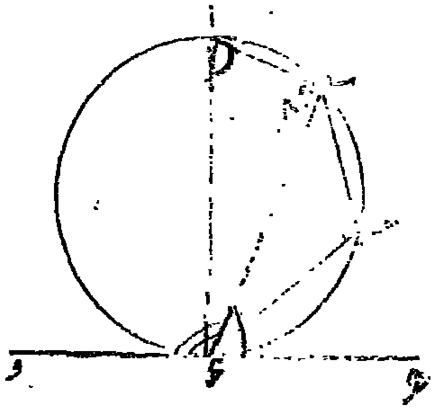
(ثانيا) التى نصف قطرها معلوم وتمس دائرة معلومة

٩ المطلوب رسم دائرة مركزها معلوم تمس دائرة معلومة كم حلا لهذه المسألة

١٠ المطلوب رسم دائرة نصف قطرها معلوم تمس دائرة أخرى معلومة فى نقطة مفروضة على محيطها كم حلا لهذه المسألة

نظرية ٤٩

الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ووترها المار بنقطة التماس والواقعة فى احدى جهتى الوتر تساوى الزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر فى الجهة الأخرى منه



اذا فرضنا أن المستقيم هـ و يمس الدائرة ب د ا فى د و ب د وتر مرسوم فيها من نقطة التماس د فانه يطلب إثبات أن

(أولا) ∠ هـ د ب = الزاوية المرسومة فى القطعة د ا ب

(ثانيا) ∠ و د ب = الزاوية المرسومة فى القطعة د حـ ب

لذلك نرسم القطر د ا من نقطة د

ونفرض النقطة حـ على قوس القطعة التى ليست فيها ا

ثم نصل ا ب و ب حـ و حـ د

البرهان — من حيث ان ∠ ا ب د فى نصف دائرة فهى قائمة

∴ مجموع الزاويتين ب د ا و د ا ب = قائمة

لكن هـ د و مماس و د ا قطر مار بنقطة التماس

∴ ∠ هـ د ا قائمة

∴ ∠ هـ د ا = مجموع الزاويتين ب د ا و د ا ب

فلو طرحنا الزاوية المشتركة ب د ا

لكانت ∠ هـ د ب = ∠ د ا ب المرسومة على الوتر فى الجهة الأخرى

ومن حيث ان ا ب حـ د شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

∴ ∠ د حـ ب = المكملة لزاوية د ا ب

= المكملة لزاوية هـ د ب

= ∠ و د ب

∴ ∠ و د ب = ∠ د حـ ب المرسومة على الوتر فى الجهة الأخرى وهو المطلوب

تمارين على نظرية ٤٩

١ فى شكل نظرية ٤٩ اذا كانت ∠ ه ء ب = ٧٢ فما مقدار كل من الزوايا ء ا ب ، ء حـ ب ، و ء ب

٢ برهن بواسطة هذه النظرية على أن المماسين لدائرة من نقطة معلومة خارجها متساويان

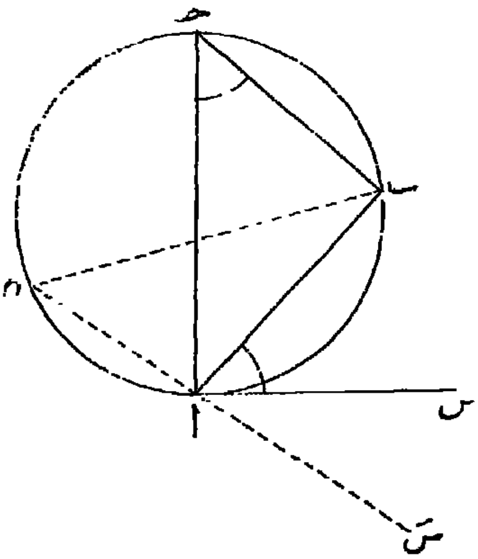
٣ دائرتان متماستان فى ا رسمنا مستقيمين يمران بها ويقطعان احدى الدائرتين فى ل ، م والأخرى فى س ، ص برهن على أن ل م يوازى س ص سواء كان التماس من الداخل أو من الخارج

٤ ا ب وتر مشترك بين دائرتين تمر إحداهما بمركز الاخرى م برهن على أن م ا ينصف الزاوية المحصورة بين هذا الوتر المشترك والمماس للدائرة الأولى فى ا

٥ دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب فرض على إحداهما نقطة مامثل ن ومد منها المستقيمان ن ا حـ ، ن ب ء فقطعا الدائرة الثانية فى حـ ، ء برهن على أن حـ ء توازى مماس الدائرة الأولى فى ن

٦ اذا رسمنا مماسا لدائرة وترا فيها مارًا بنقطة التماس فبرهن على أن العمودين النازلين من منتصف أحد القوسين على المماس والوتر متساويان

تمارين على طريقة نهاية الأوضاع



١ المطلوب البرهنة على نظرية ٤٩ بطريقة نهاية الأوضاع

نفرض أن ا حـ ب قطعة دائرة وترها ا ب ، ن ا سَ مستقيم ما يقطع المحيط فى ن ، ا فاذا وصل ن ب يحدث أن ∠ ب حـ ا = ∠ ب ن ا (نظرية ٣٩)

وهذه المتساوية حقيقية مهما اقتربت ن من ا فاذا تحركت النقطة ن حتى وقعت على ا صار القاطع ن ا سَ مماسا للدائرة وانطبق على المماس ا س

وتنطبق ∠ ب ن ا على ∠ ب ا س

ففى نهاية الأوضاع ∠ ب ا س = ∠ ب حـ ا المرسومة فى الجهة الأخرى من الوتر

٢ برهن من نظرية ٣١ بطريقة نهاية الأوضاع على أن العمود المقام على قطر الدائرة من نهايته مماس لمحيطها

٣ استنتج نظرية ٤٨ من هذه الخاصة : خط مركزى الدائرتين المتقاطعتين ينصف الوتر المشترك ويكون عمودا عليه

٤ استنتج نظرية ٤٩ من تمرين ٥ صفحة ١٨١

٥ استنتج نظرية ٤٦ من نظرية ٤١

في الدعاوىّ العملية

التحليل الهندسي .

الطريقة العامة التي اتبعناها الى الآن في حل ماتقدم من الدعاوى مؤسسة على ماهو معروف بطريقة التركيب وهي ترتيب فروض الدعوى وتركيبها بحيث يمكن أن يستنبط منها ناتج يوصل الى الغرض المقصود

وهذه الطريقة وان كانت في ذاتها منطقية لاتكشف في كثير من الأحوال الغطاء عن السبب الذي به يمكن الوصول الى رسم الحل أو اقامة البرهان على صحة الدعوى

وهناك سير آخر يؤدي البحث فيه غالبا الى الاهتداء الى طريقة لحل المسألة لاسيما اذا كانت من الدعاوى العملية

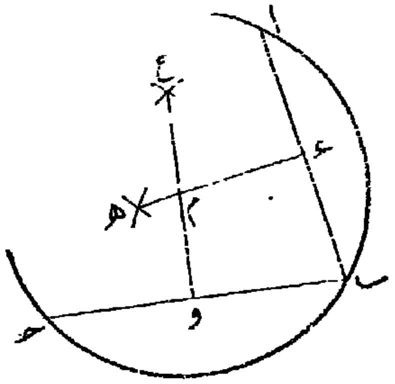
وهو مؤسس على الطريقة المعروفة بطريقة التحليل الهندسي وهي عكس طريقة التركيب المتقدّمة الذكر

وذلك لأنا في طريقة التحليل نفرض أن المسألة محلولة وانا قد حصلنا على الناتج المقصود ونبحث عن الفروض التي عساها أن تكون منتجة لهذا الناتج ثم نتتبع أصل كل فرض بأن نبحث عن كيفية استنباطه مما قبله وهكذا حتى نقف في سيرنا على فرض أصيل في دعوى معينة وهذا في الغالب يشير الى طريق معرفة الحل . فنبدأ من الأصل الذي وقفنا عليه ونرجع في طريقنا على عكس الترتيب الذي اتبعناه وبذلك نسير على طريقة التركيب متتبعين كل ناتج من فرض قبله وهكذا حتى نصل الى الناتج الأخير المقصود من الدعوى

وسنوضح حل بعض العمليات الآتية بطريقة التحليل (راجع عمليات ٢٣ و ٢٨ و ٢٩)

عملية ٢٠

المعلوم دائرة أو قوس منها والمطلوب ايجاد مركزها



نفرض أن ا ب حـ قوس الدائرة المطلوب ايجاد مركزها

العمل — نرسم وترين مثل ا ب ، ب حـ ونقيم من منتصفيهما العمودين د هـ ، و ع فيتقاطعان في م (عملية ٢)

فتكون هي المركز

البرهان — كل نقطة من نقط د هـ على بعدين متساويين من ا ، ب (عملية ١٤)

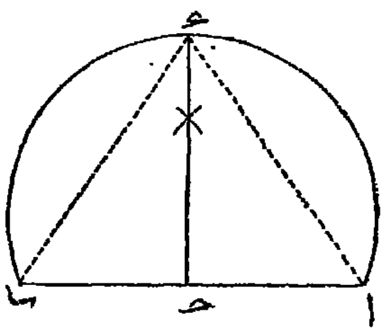
وكذلك كل نقطة من نقط و ع على بعدين متساويين من ب ، حـ

∴ نقطة تقاطعهما م على أبعاد متساوية من ا ، ب ، حـ

∴ م هي المركز (نظرية ٣٣) وهو المطلوب

عملية ٢١

المطلوب تنصيف قوس معلوم



نفرض أن القوس المراد تنصيفه ا د ب

العمل — نصل ا ب ونقيم من منتصفه حـ العمود حـ د (عملية ٢) ونمده حتى يقابل القوس في نقطة د فتكون هي منتصف القوس

البرهان — نصل د ا ، د ب

فمن حيث ان كل نقطة من نقط حـ د على بعدين متساويين من ا ، ب (عملية ١٤)

∴ ا د = د ب

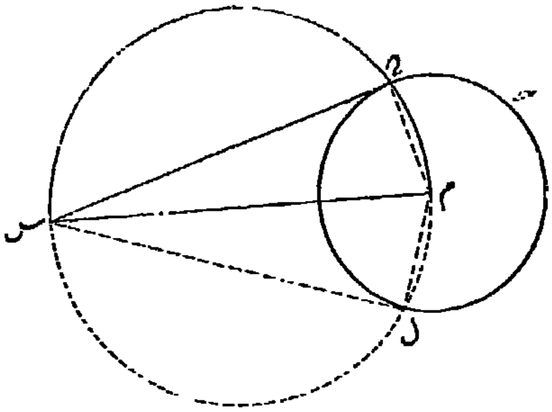
∴ ∠ د ب ا = ∠ د ا ب (نظرية ٦)

وعليه فقوس الزاوية المحيطية د ب ا = قوس المحيطية د ا ب

أي أن القوس د ا = القوس د ب

عملية ٢٢

المطلوب رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها



نفرض أن ل ح ق الدائرة المعلومة وأن م مركزها ٯ س النقطة المفروضة خارجها

العمل — نصل س م ونرسم عليه نصف المحيط م ق س قاطعا الدائرة المعلومة فى ق

ثم نصل المستقيم س ق

فيكون هو المماس المطلوب

البرهان — نصل م ق

فتكون ∠ م ق س مرسومة فى نصف دائرة فهى اذن قائمة

∴ س ق عمود على نصف القطر م ق

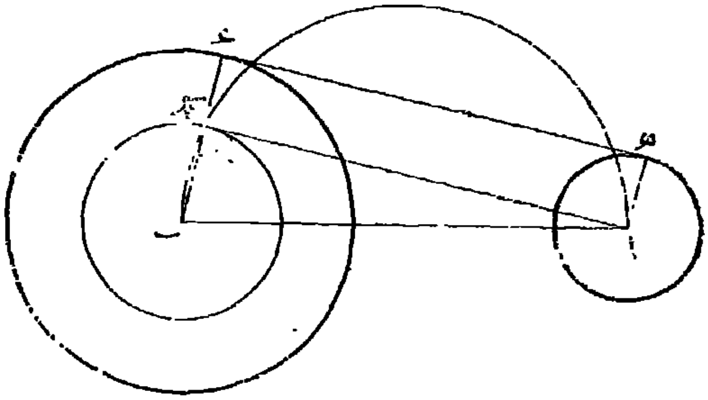
وعليه فالمستقيم س ق يمس الدائرة المعلومة فى ق (نظرية ٤٦)

ومن حيث انه يمكن رسم نصف محيط دائرة آخر على القطر م س يقطع محيط الدائرة المعلومة فى نقطة أخرى مثل ل يمكن أيضا رسم مماس آخر س ل للدائرة المعلومة من النقطة المفروضة س

تنبيه — اذا فرضنا أن النقطة س تقترب من الدائرة فان ∠ ق س ل تزداد شيئا فشيئا حتى اذا ما وقعت س على المحيط تصير الزاوية مستقيمة وينطبق المماسان كل على الآخر فاذا دخلت س فى الدائرة استحال مد مماس منها (راجع الملاحظة فى صفحة ٩٨)

عملية ٢٣

المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين



نفرض أن ا مركز الدائرة الصغرى وان اد نصف قطرها وأن ب مركز الدائرة الكبرى وان ب حـ نصف قطرها

التحليل — اذا فرضنا أن هـ ى يمس الدائرتين فى هـ ، ى كان نصفا القطرين ا هـ ، ب ى عمودين على هـ ى فهما اذن متوازيان

واذا رسمنا ا حـ موازيا هـ ى كان الشكل ا ى مستطيلا وكان حـ ى = ا هـ = ا

فاذا كان ا هـ ، ب ى فى جهة واحدة من ا ب حدث أن ب حـ = بَ — اَ ، ∠ ا حـ ب قائمة وعلى ذلك يمكن رسم ا حـ ومنه نتوصل الى الحل

العمل — نركز فى ب وبنصف قطر يساوى الفرق بين نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة ثم نمد من ا مماسا لها وليكن ا حـ

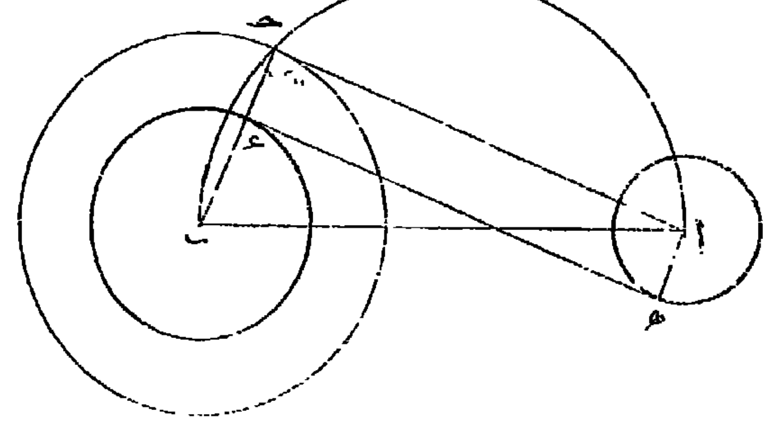
ونصل ب حـ ونمده على استقامته ليقابل الدائرة ب فى ى ثم نرسم من ا نصف القطر ا هـ موازيا ب ى وفى اتجاهه

ونصل هـ ى

فيكون هـ ى هو المماس المشترك المطلوب

ملاحظة — من حيث انه يمكن مد مماسين مثل ا حـ من نقطة ا الى محيط الدائرة التى رسمناها للتوصل بها الى الحل فبالطريقة المتقدمة يمكن رسم مماسين مشتركين للدائرتين المعلومتين ويقال لهما مماسان للدائرتين من الخارج

(تابع) عملية ٢٣



اذا كانت الدائرتان متباعدتين فى الخارج فانه يمكن رسم مماسين آخرين غير المماسين المتقدمين كل منهما يجعل احدى الدائرتين فى جهة منه والدائرة الأخرى فى الجهة الأخرى

التحليل — اذا فرضنا فى هذه الحالة أن هـ ى يمس الدائرتين فى هـ ، ى بحيث يقع ا هـ فى جهة من ا ب ، ب ى فى الجهة الأخرى

حدث أن المستقيم ا ح الموازى للماس هـ ى يقابل امتداد ب ى فى ح

وأن ب ح = ب ى + ى ح = ب + ا

ولكون ∠ ا ح ب قائمة كما تقدم

نستنتج ما يأتى

العمل — نركز فى ب وبنصف قطر يساوى مجموع نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة ثم نمد ا ح مماسا لها ونجرى ما أجريناه فى الحالة المتقدمة إلا أننا نرسم ا هـ فى اتجاه مضاد لاتجاه المستقيم ب ى

ملاحظة — من حيث انه يمكن مد مماسين من النقطة ا الى الدائرة التى رسمناها للتوصل بها الى الحل كما فى الحالة المتقدمة فانه يمكن كذلك رسم مماسين مشتركين للدائرتين المعلومتين ويقال لهما مماسان من الداخل

[هذا ونترك للطالب ترتيب حل هذه المسألة على طريقة التركيب]

تمارين على المماسات المشتركة

(مسائل عددية وتخطيطية)

١ كم مماسا مشتركا يمكن أن ترسم فى كل من الأحوال الآتية

(أولا) اذا تقاطع محيطا دائرتين

(ثانيا) اذا تماسا من الخارج

(ثالثا) اذا تماسا من الداخل

وضح الاجابة برسم دائرتين نصف قطر إحداهما ٣٫٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٢٫٥ من السنتيمترات بحيث يكون البعد بين المركزين يساوى

(أولا) ٢٫٥ من السنتيمترات

(ثانيا) ٦ سنتيمترات

(ثالثا) ١ سنتيمترا

(رابعا) ٧٫٥ من السنتيمترات

ثم ارسم المماسات المشتركة فى كل حالة وبين فى أى الحالات لايمكن اتباع الطريقة العامة فى رسم هذه المماسات أو إمكان اتباعها مع التعديل

٢ ارسم دائرتين نصف قطر إحداهما ٤ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١٫٦ من السنتيمترات بحيث يكون البعد بين مركزيهما ٤ سنتيمترات وارسم المماسات المشتركة واستخرج أطوالها ثم قسها

٣ ارسم جميع المماسات المشتركة لدائرتين مركزاهما متباعدان بقدر ٤٫٥ من السنتيمترات ونصف قطر إحداهما ١٫٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٣ سنتيمترات واستخرج طول كل من المماسين الخارجين بالحساب والقياس

٤ دائرتان نصف قطر إحداهما ٣٫٤ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى سنتيمتران والبعد بين مركزيهما ٤٫٢ من السنتيميرات والمطلوب (أولا) رسم المماسات المشتركة (ثانيا) ايجاد أطوالها (ثالثا) ايجاد طول الوتر المشترك (رابعا) مدّ الوتر المشترك على استقامته وبيان أنه ينصف هذه المماسات بالقياس

٥ دائرتان نصف قطر إحداهما ٣٫٢ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١٫٦ من السنتيمترات والبعد بين مركزيهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم جميع المماسات المشتركة لهما

٦ المطلوب رسم المماسين المشتركين الخارجين لدائرتين متساويتين

(مسائل نظرية)

٧ اذا رسمنا مماسين مشتركين لدائرتين فان جزأيهما المحصورين بين نقطتي التماس متساويان سواء كان المماسان خارجين أو داخلين

٨ اذا رسمنا مماسين خارجين ومماسين داخلين لدائرتين متباعدتين فى الخارج فان المماسين الداخلين يتقاطعان فى نقطة على خط المركزين وكذلك المماسان الخارجان اذا امتدّا

٩ دائرتان متماستان من الخارج فى نقطة ا رسم مماس مشترك يمسهما فى نقطتى ح ، ى برهن على أن المستقيم ح ى يقابل زاوية قائمة رأسها فى ا

فى رسم الدوائر

لإمكان رسم الدائرة يجب تعيين

(أولا) مركزها

(ثانيا) طول نصف قطرها

ولتعيين المركز يجب أن يتوفر شرطان يتعين بكل منهما محل هندسي يكون مركز الدائرة احدى نقطه فنقطة تقاطع هذين المحلين تعين وضع المركز (كما تبين ذلك فى صفحة ٩٨)

ولتعيين طول نصف القطر يجب أن تعين أى نقطة أخرى من نقط محيط الدائرة بعد تعيين المركز

وعلى ذلك يمكن رسم الدائرة متى علمت ثلاثة فروض مطلقة

فمثلا يمكن رسم الدائرة متى علم

(أولا) ثلاث نقط من نقط المحيط

(ثانيا) أوضاع ثلاثة مماسات

(ثالثا) نقطة من نقط المحيط ومماس ونقطة التماس التى عليه

وقد يمكن رسم أكثر من دائرة تستوفى الشروط الثلاثة المفروضة

وعلى الطالب قبل حل التمارين الآتية أن يتنبه الى معرفة المحال الهندسية الآتى بيانها

(أولا) المحل الهندسى لمراكز الدوائر المارّة بنقطتين معلومتين

(ثانيا) المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس مستقيما معلوما فى نقطة مفروضة عليه

(ثالثا) المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس دائرة معلومة فى نقطة مفروضة عليها

(رابعا) المحل الهندسى لمراكز الدوائر المعلوم نصف قطرها والتى تمس مستقيما معلوما

(خامسا) المحل الهندسى لمراكز الدوائر المعلوم نصف قطرها والتى تمس دائرة معلومة

(سادسا) المحل الهندسي لمراكز الدوائر التى تمس مستقيمين معلومين

تمارين

١ ارسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة

٢ اذا رسمت دائرة تمس مستقيما معلوما وليكن ل ى في ب فعلى أى مستقيم يكون مركزها

واذا مرت دائرة بالنقطتين المعلومتين ا ، ب فعلى أى مستقيم يكون مركزها

اذا علم هذا فانه يطلب رسم دائرة تمس مستقيما معلوما مثل ل ى فى نقطة ب وتمر بنقطة أخرى مثل ا

٣ اذا رسمت دائرة تمس دائرة معلومة مركزها م فى نقطة ا فعلى أى خط يكون مركز هذه الدائرة

ارسم دائرة تمس الدائرة المعلومة م فى ا وتمر بنقطة أخرى ب

٤ النقطة ى تبعد عن المستقيم ا ب بقدر ٤٫٥ من السنتيمترات والمطلوب رسم دائرتين نصف قطر كل منهما ٣٫٢ من السنتيمترات تمران بالنقطة ى وتمسان المستقيم ا ب

٥ دائرتان نصف قطر إحداهما ٣ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى سنتيمتران والبعد بين مركزيهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم دائرة نصف قطرها ٣٫٥ من السنتيمترات تمس كلا من الدائرتين المعلومتين من الخارج

كم حلا لهذه المسئلة وما طول نصف قطر أصغر دائرة تمس الدائرتين المعلومتين من الخارج

٦ اذا مس محيط دائرة المستقيمين م ا ، م ب فعلى أى مستقيم يكون مركزها

ارسم م ا ، م ب بحيث يحصران بينهما زاوية مقدارها ٧٦° وارسم دائرة نصف قطرها ٣٫٢ من السنتيمترات تمس كلا من هذين المستقيمين

٧ دائرة نصف قطرها ٣٫٥ من السنتيمترات وبعد مركزها عن المستقيم المعلوم ا ب يساوى ٥ سنتيمترات والمطلوب رسم دائرتين نصف قطر كل منهما ٢٫٥ من السنتيمترات بحيث تمسان الدائرة المعلومة والمستقيم ا ب

٨ كيف ترسم دائرة تمس كلا من مستقيمين متوازيين وقاطع لهما

برهن على أنه يمكن رسم دائرتين متساويتين من هذا القبيل

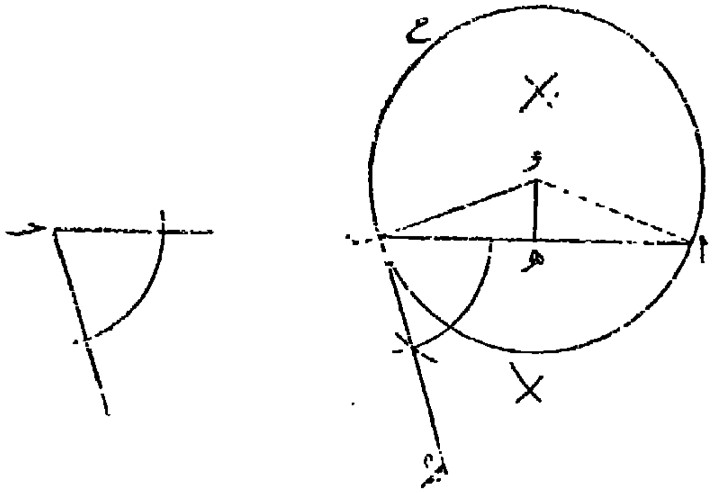
٩ ارسم دائرة تمس دائرة أخرى معلومة ومستقيما معلوما فى نقطة مفروضة عليه

١٠ ارسم دائرة تمس مستقيما معلوما ودائرة أخرى معلومة فى نقطة مفروضة على محيطها

١١ كيف ترسم دائرة تمس كلا من ثلاثة مستقيمات معلومة لايتوازى منها اثنان . كم دائرة يمكن رسمها من هذا القبيل

عملية ٢٤

المطلوب رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة



اذا فرضنا أن ا ب هوالمستقيم المعلوم وأن ـــ حـ هي الزاوية المعلومة
فانه يطلب رسم قطعة دائرة على ا ب تقبل زاوية تساوى ـــ حـ
العمل — نرسم من ب المستقيم ب ء يصنع زاوية مع المستقيم ب ا تساوى ـــ حـ
ونقيم من ب العمود ب و على ب ء
ثم ننصف ا ب فى هـ ونقيم منها العمود هـ و على ا ب ونمدّه حتى يقابل ب و فى نقطة و (عملية ٢)
البرهان — نصل و ا
فمن حيث ان كل نقطة من نقط هـ و على بعدين متساويين من ا ، ب (عملية ١٤)
∴ و ا = و ب
فاذا ركزنا فى و ورسمنا دائرة بنصف قطر يساوى و ب فانها تمر بنقطة ا وتمس ب ء فى ب (نظرية ٤٦)
وعليه فالقطعة ا ع ب مرسومة على ا ب فى الجهة المقابلة للتى فيها زاوية ا ب ء
فأى زاوية مرسومة فى القطعة ا ع ب يجب أن تساوى ـــ ا ب ء (نظرية ٤٩)
أى أن القطعة ا ع ب تقبل الزاوية المعلومة
تنبيه — اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة فالقطعة التى تقبلها نصف دائرة قطرها المستقيم المعلوم ا ب (نظرية ٤١)
نتيجة — اذا أريد فصل قطعة من دائرة تقبل زاوية معلومة يكفى أن نمدّ مماسا لهذه الدائرة ونرسم من نقطة التماس وترا فيها يصنع مع المماس المذكور زاوية تساوى الزاوية المعلومة
وقد سبق فى (صفحة ١٧٩) البرهنة على أن :
المحل الهندسى لرؤوس المثلثات المرسومة على قاعدة واحدة وزوايا رؤوسها تساوى زاوية معلومة هو قوس القطعة المرسومة على هذه القاعدة والتى تقبل الزاوية المعلومة
وبواسطة هذه العملية وباستعمال طريقة تقاطع المحال الهندسية المنوه عنها فى صفحة ٩٨ يمكن حل المسائل العملية الآتية

تمارين

١ المطلوب رسم مثلث على قاعدة معلومة رأسه على مستقيم معلوم وزاوية رأسه تساوى زاوية معلومة

٢ المطلوب رسم المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية الرأس وأحد الفروض الآتية

(أولا) ضلع غير القاعدة

(ثانيا) الارتفاع

(ثالثا) طول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة

(رابعًا) موقع العمود النازل من الرأس على القاعدة

٣ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس ونقطة تقابل منصف زاوية الرأس بهذه القاعدة

[نفرض أن ا ب القاعدة ، س النقطة المفروضة عليها ، ى الزاوية المعلومة فنرسم على ا ب قطعة دائرة تقبل ـــ ى ثم نكمل الدائرة برسم القوس ا ء ب وننصفه فى ء ثم نصل ء س ونمده على استقامته حتى يقابل المحيط فى ح فيكون ا ب ح هو المثلث المطلوب]

٤ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس ومجموع الضلعين الآخرين

[نفرض أن ا ب القاعدة ، ى الزاوية المعلومة ، ط مستقيم مساو لمجموع الضلعين ونرسم على ا ب قطعتى دائرتين إحداهما تقبل زاوية = ـــ ى والثانية تقبل زاوية = نصف ـــ ى ثم نركز فى ا وبنصف قطر يساوى ط نرسم دائرة تقطع قوس القطعة الثانية فى س ، ص ثم نصل ا س (أو ا ص) فيقطع قوس القطعة الأولى فى ح ويكون ا ب ح هو المثلث المطلوب]

٥ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس والفرق بين الضلعين الآخرين

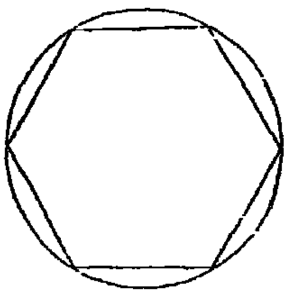
الدائرة والأشكال المستقيمة الأضلاع

تعاريف

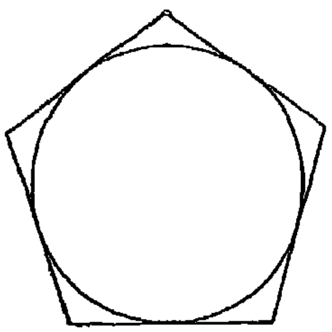
١ كثير الأضلاع شكل مستقيم الأضلاع محدود بأكثر من أربعة مستقيمات

ويسمى مخمسا	اذا كانت أضلاعه خمسة
« مسدسا	« « « ستة
« مسبعا	« « « سبعة
« مثمنا	« « « ثمانية
« معشرا	« « « عشرة
« ذا الاثنى عشر ضلعا	« « « اثنا عشر
« ذا الخمسة عشر ضلعا	« « « خمسة عشر وهكذا

٢ كثير الأضلاع أو المضلع المنتظم ما كانت أضلاعه متساوية وزواياه كذلك



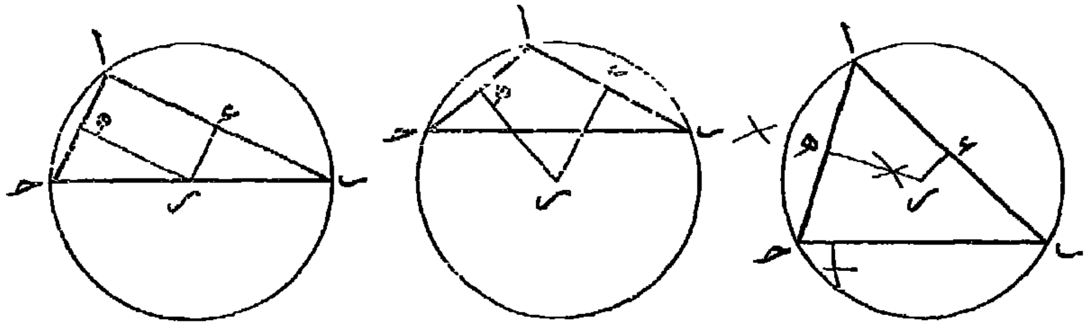
٣ يقال ان الشكل المستقيم الأضلاع مرسوم داخل دائرة متى كانت جميع رؤوسه على محيطها ويقال ان الدائرة مرسومة خارج أى شكل مستقيم الأضلاع أو عليه متى مر محيطها برؤوسه



٤ يقال ان الدائرة مرسومة داخل الشكل المستقيم الأضلاع متى كان كل ضلع من أضلاعه يمس محيطها وفى هذه الحالة يقال ان هذا الشكل مرسوم خارج الدائرة

عملية ٢٥

المطلوب رسم دائرة خارج مثلث معلوم



نفرض أن ا ب ح المثلث المطلوب رسم دائرة خارجه

العمل — نقيم على ا ب من منتصفه العمود ى م وعلى ا ح من منتصفه العمود هـ م فيتقابلان فى م (عملية ٢)

فتكون م هى المركز

البرهان — من حيث ان كل نقطة من نقط ى م على بعدين متساويين من ا ، ب (عملية ١٤)
وكذلك كل نقطة من نقط هـ م على بعدين متساويين من ا ، ح

∴ م على أبعاد متساوية من ا ، ب ، ح

فاذا ركز فى م ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوى م ا فانه يمر بالنقطتين ب ، ح ويكون هو المحيط المطلوب

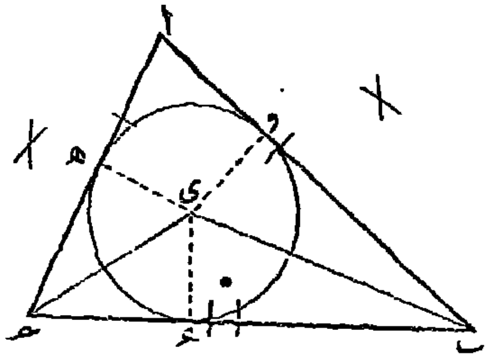
ملاحظة — نرى أنه اذا كان المثلث حاد الزوايا فان مركز الدائرة يقع داخله واذا كان قائم الزاوية يقع المركز على وتر المثلث واذا كان منفرج الزاوية يقع المركز خارجا عنه

تنبيه — يؤخذ مما تقدم فى (صفحة ٩٨) أنه اذا وصلنا النقطة م بمنتصف ب ح كان المستقيم الواصل عمودا على ب ح

وعليه فالأعمدة الثلاثة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث

عملية ٢٦

المطلوب رسم دائرة داخل مثلث معلوم



نفرض أن ا ب حـ المثلث المراد رسم الدائرة داخله

العمل — ننصف كلا من ∠ ا ب حـ ، ∠ ا حـ ب بالمستقيمين ب ى ، حـ ى المتقاطعين فى ى (عملية ١)

فتكون ى مركز الدائرة

البرهان — ننزل من ى الأعمدة ى د ، ى هـ ، ى و على أضلاع المثلث فكل نقطة من نقط ب ى على بعدين متساويين عن ب حـ ، ب ا (عملية ١٥)

∴ ى د = ى و

وكذلك كل نقطة من نقط حـ ى على بعدين متساويين عن حـ ب ، حـ ا

∴ ى د = ى هـ

∴ ى د = ى هـ = ى و

فاذا ركزنا فى ى وبنصف قطر يساوى أحدها ى د رسمنا دائرة فان محيطها يمر بالنقطتين الأخريين هـ ، و ويمس الأضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب لأن الزوايا فى د ، هـ ، و قوائم

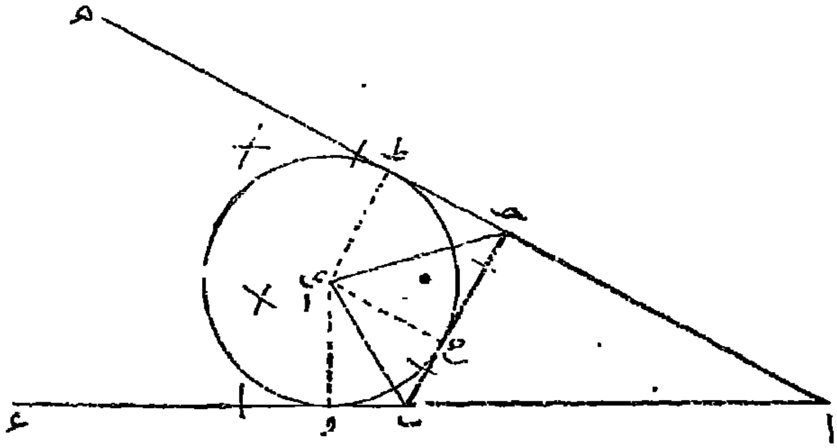
أى أن الدائرة د هـ و مرسومة داخل المثلث

تنبيه — يؤخذ مما تقدم (فى ٢ صفحة ١٠١) أنه اذا وصلنا ا ى كان منصفا لزاوية ب ا حـ وعلى ذلك فمنصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة المرسومة داخله

تعريف — الدائرة التى تمس المثلث من الخارج هى ماسس محيطها أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلعين الآخرين

عملية ٢٧

المطلوب رسم دائرة تمس المثلث من الخارج



اذا فرضنا أن ا ب ح المثلث ومددنا الضلع ا ب الى د والضلع ا ح الى ه
فانه يطلب رسم الدائرة التى تمس ب ح وامتداد الضلعين ا ب ، ا ح

العمل — ننصف الزاويتين ح ب د ، ب ح ه بالمستقيمين ب ى١ ، ح ى١ فيتقاطعان فى ى١
فتكون ى١ مركز الدائرة المطلوبة

البرهان — ننزل من ى١ الأعمدة ى١ و ، ى١ ع ، ى١ ط على ا د ، ب ح ، ا ه
ومن حيث ان كل نقطة من نقط ب ى١ على بعدين متساويين من ب د ، ب ح (عملية ١٥)

∴ ى١ و = ى١ ع

وكذلك ى١ ع = ى١ ط

∴ ى١ و = ى١ ع = ى١ ط .

فاذا ركزنا فى ى١ وبنصف قطر يساوى ى١ و رسمنا محيط دائرة فانه يمر بالنقطتين ع ، ط ويمس ا د ، ب ح ، ا ه لأن الزوايا فى و ، ع ، ط قوائم

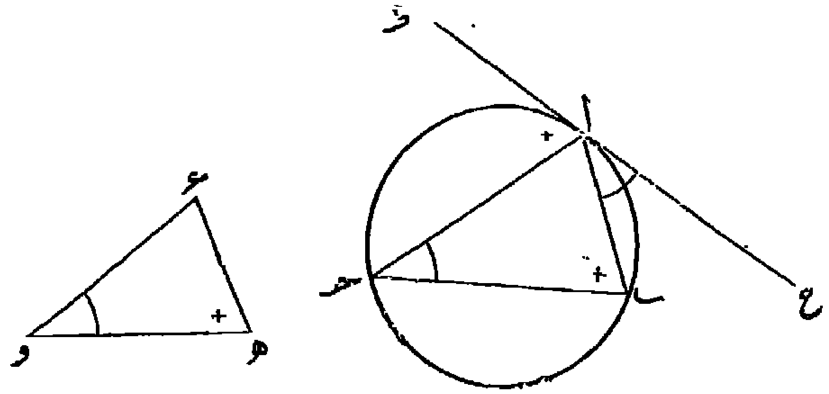
∴ و ع ط هى الدائرة التى تمس المثلث من الخارج

تنبيه ١ — يؤخذ مما تقدّم أنه يمكن رسم ثلاث دوائر كل منها تمس المثلث من الخارج

تنبيه ٢ — يؤخذ مما تقدّم (فى ٢ صفحة ١٠١) أنه اذا وصلنا ا ى١ كان منصفا لزاوية ب ا ح وعلى ذلك فمنصفا الزاويتين الخارجتين للمثلث ومنصف الثالثة الداخلة تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة هى مركز الدائرة التى تمس أضلاع المثلث من الخارج

عملية ٢٨

المطلوب رسم مثلث داخل دائرة معلومة زواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم



نفرض أن ا ب ح الدائرة المعلومة ، ء ه و المثلث المعلوم

التحليل — نفرض أن المسألة محلولة وأن ا ب ح المثلث المطلوب فاذا أمكن من نقطة ما على المحيط مثل ا رسم الوترين ا ب ، ا ح بحيث اذا وصل ب ح تكون

ـــ ب = ـــ ه ، ـــ ح = ـــ و

حدث أن ـــ ب ا ح = ـــ ء (نظرية ١٦)

وبالتأمل نرى أن ـــ ب المرسومة فى القطعة ا ب ح تبين مساويتها المحصورة بين الوتر ا ح ومماس الدائرة فى نقطة ا (نظرية ٤٩)

فاذا رسمنا اذن من ا المماس ع ا ط حدث أن ـــ ط ا ح = ـــ ه

وكذلك ـــ ع ا ب = ـــ و

فاذا اتبعنا عكس هذا السير نصل الى العمل الآتى

العمل — نفرض نقطة ما مثل ا على المحيط ا ب ح ونرسم المماس ع ا ط (عملية ٢٢)

ونمد من نقطة ا الوتر ا ح بحيث يصنع مع المماس ا ط الزاوية ط ا ح تساوى ـــ ه

ونمد من نقطة ا الوتر ا ب بحيث يصنع مع ا ع الزاوية ع ا ب تساوى ـــ و

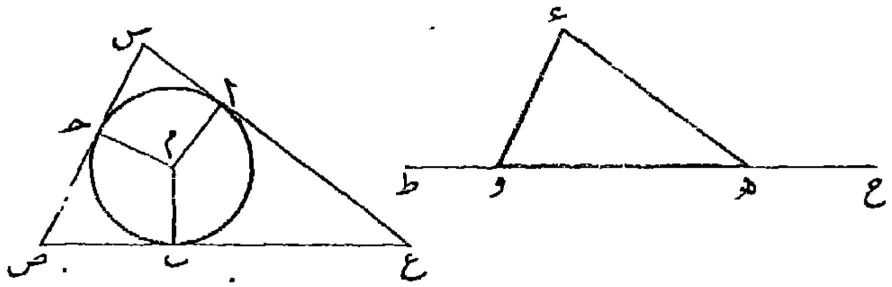
ثم نصل ب ح

فيكون ا ب ح المثلث المطلوب

تنبيه — يجدر بالتلميذ أن يرسم شكل هذه الدعوى والتى بعدها مكبرا ويبين فيه الخطوط اللازمة لرسم المماس ع ا ط وكذلك الخطوط اللازمة لرسم الزاويتين ط ا ح ، ع ا ب

عملية ٢٩

المطلوب رسم مثلث خارج دائرة معلومة زواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم



نفرض أن ا ب حـ الدائرة المعلومة ، ء هـ و المثلث المعلوم

التحليل — نفرض أن المسئلة محلولة وأن س ع ص المثلث المرسوم خارج الدائرة وأن ∠ ع = ∠ هـ ، ∠ ص = ∠ و

وحينئذ ينتج أن ∠ س = ∠ ء

فاذا فرضنا أن م مركز الدائرة ووصلنا بين المركز ونقط التماس ا ، ب ، حـ كانت المستقيمات م ا ، م ب ، م حـ أنصاف أقطار عمودية على أضلاع المثلث لأن كلا من هذه الأضلاع مماس للدائرة

فاذا علمت اذن أوضاع أنصاف الأقطار المذكورة أمكن رسم المماسات وتعلم أوضاعها بتعيين مقدار كل من الزاويتين ا م ب ، ب م حـ

ومن حيث انه فى الشكل الرباعى ب م ا ع

∠ ب + ∠ ا = ٢ ق

∴ ∠ ا م ب = ١٨٠° — ∠ ع = ١٨٠° — ∠ هـ

وكذلك ∠ ب م حـ = ١٨٠° — ∠ ص = ١٨٠° — ∠ و

ومن ذلك نستنتج الطريقة الآتية لحل العملية

العمل — نمدّ هـ و على استقامته فى كل من جهتيه الى ح ، ط ثم نعين مركز الدائرة ا ب حـ وليكن م

ثم نرسم نصف قطر مّا مثل م ب

ونرسم من م نصف القطر م ا بحيث تكون ∠ ب م ا = ∠ ء هـ ح

ثم نرسم ∠ ب م حـ = ∠ ء و ط

ونقيم على أنصاف الأقطار أعمدة من النقط ا ، ب ، حـ تتقابل مثنى فى س ، ع ، ص

∴ س ع ص هو المثلث المطلوب

(ويترك للتلميذ البرهنة على هذه العملية بطريقة التركيب

تمـــارين على الدوائر والمثلثات

١ المعلوم دائرة نصف قطرها ٥ سنتيمترات والمطلوب رسم مثلث متساوى الأضلاع داخلها وآخر خارجها أذكر فى كل من الحالتين الحل العملى و برهن عليه

٢ المطلوب رسم مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سنتيمترات وحساب طول نصف قطر كل من الدوائر المرسومة داخله والمرسومة خارجه والتى تمس أضلاعه من الخارج وقياس كل الى أقرب مليمتر بيّن السبب فى أن نصف قطر الدائرة الثانية ضعف نصف قطر الأولى ونصف قطر الثالثة ثلاثة أمثاله

٣ المطلوب رسم مثلثات من الفروض الآتية

(أولا) ا̄ = ٥ سنتيمترات ، ب = ٦٦° ، ح = ٥٠°

(ثانيا) ا̄ = ٥ « ، ب = ٧٢° ، ح = ٤٤°

(ثالثا) ا̄ = ٥ « ، ب = ٤١° ، ح = ٢٣°

ارسم دائرة خارج كل مثلث وقس نصف قطرها الى أقرب مليمتر وبين السبب فى أن النتائج الثلاثة متحدة بأن تقارن الزوايا الرأسيه للمثلثات

٤ ارسم مثلثا متساوى الأضلاع داخل دائرة نصف قطرها ٤ سنتيمترات واحسب طول ضلعه الى أقرب مليمتر وحقق ذلك بالقياس

ثم أوجد مساحة هذا المثلث و برهن على أنها تساوى ربع مساحة المثلث المتساوى الأضلاع المرسوم خارج الدائرة المذكورة

٥ اذا كانت ى مركز الدائرة المرسومة داخل $\triangle$ ا ب ح ، س نصف قطر هذه الدائرة

فبيّن أن $\triangle$ ى ب ح = $\frac{1}{2}$ ا̄ س

، $\triangle$ ى ح ا = $\frac{1}{2}$ ب̄ س

، $\triangle$ ى ا ب = $\frac{\ }{2}$ ح̄ س

وبذا برهن على أن $\triangle$ ا ب ح = $\frac{1}{2}$ (ا̄ + ب̄ + ح̄) س

ثم حقق هــذا القانون بأخذ المقاسات اللازمة فى المثلث الذى أطوال أضـــلاعه ٩ سنتيمترات ، ٨ سنتيمترات ، ٧ سنتيمترات

٦ برهن على أنه اذا فرض أن س١ نصف قطر الدائرة التى تمس المثلث من الخارج والتى تقابل ا يحدث أن $\triangle$ ا ب ح = $\frac{1}{2}$ (ب̄ + ح̄ − ا̄) س١

ثم حقق هذا الناتج بالقياس على فرض أن ا̄ = ٥ سنتيمترات و ب̄ = ٤ سنتيمترات ، ح̄ = ٣ سنتيمترات

٧ ا ب ح مثلث فيه ا̄ = ٦٫٣ من السنتيمترات ، ب̄ = ٣ سنتيمترات ، ح̄ = ٥٫١ من السنتيمترات والمطلوب قياس نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث وانزال أعمدة من ا ، ب ، ح على الأضلاع المقابلة لها وقياسها فاذا رمز لأطوال هذه الأعمدة بالرموز ع١ ، ع٢ ، ع٣ يحدث أن نصف قطر الدائرة الخارجة = $\frac{\text{ب̄} \times \text{ح̄}}{٢\text{ع}_١}$ = $\frac{\text{ح̄} \times \text{ا̄}}{٢\text{ع}_٢}$ = $\frac{\text{ا̄} \times \text{ب̄}}{٢\text{ع}_٣}$

تمارين على الدوائر والمربعات

١ ارسم دائرة نصف قطرها ٣ سنتيمترات وأوجد طريقة عملية لرسم مربع داخلها واحسب طول ضلعه الى أقرب مليمتر وحقق ذلك بالقياس ثم أوجد مساحة هذا المربع

٢ المطلوب رسم مربع خارج دائرة نصف قطرها ٣ سنتيمترات وبيان جميع الخطوط اللازمة للحل والبرهنة على أن مساحة المربع المرسوم خارج الدائرة ضعف مساحة المربع المرسوم داخلها

٣ ارسم مربعا طول ضلعه ٧,٥ من السنتيمترات واذكر حلا عمليا لرسم دائرة داخله وبرهن عليه بواسطة التماثل

٤ ارسم دائرة خارج مربع طول ضلعه ٦ سنتيمترات ثم قس قطرها لأقرب مليمتر وحقق ذلك بالحساب

٥ ارسم مستطيلا طول أحد أضلاعه ٧,٥ من السنتيمترات فى دائرة نصف قطرها ٤,٥ من السنتيمترات وأوجد طول الضلع الثانى بالتقريب

ثم برهن على أن مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة أكبر من مساحة أى مستطيل يرسم داخلها

٦ اذا رسمنا مربعا ومثلثا متساوى الأضلاع داخل دائرة ورمزنا لضلع المربع بالحرف آ ولضلع المثلث بالحرف ب كان

$$٣ \ ا^٢ = ٢ ب^٢$$

٧ ا ب حـ ء مربع مرسوم داخل دائرة و ﻫ نقطة على القوس ا ء برهن على أن بـ ﻫ التى يقابلها ا ء ثلاثة امثال الزاوية التى رأسها فى ﻫ ويقابلها أى ضلع آخر

(مسائل عملية)

أذكر الحل العملى والبرهان النظرى

٨ ارسم معينا خارج دائرة معلومة

٩ ارسم مربعا داخل المربع ا ب حـ ء بحيث يكون أحد رؤوسه فى نقطة مثل س مفروضة على ا ب

١٠ ارسم مربعا مساحته أصغر مايمكن داخل مربع آخر معلوم

١١ ارسم (أولا) دائرة خارج مستطيل معلوم

(ثانيا) مربعا خارج مستطيل معلوم

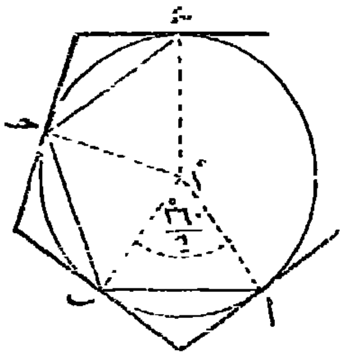
١٢ ارسم (أولا) دائرة فى ربع دائرة معلومة

(ثانيا) مربعا فى ربع دائرة معلومة

في الدوائر والمضلعات المنتظمة

عملية ٣٠

المعلوم دائرة والمطلوب رسم مضلع منتظم داخلها وآخر خارجها



نفرض أن المسألة محلولة وأن ا ب ، ب حـ ، حـ ء الخ أضلاع متوالية للمضلع المنتظم المطلوب رسمه داخل الدائرة م

فاذا وصلنا أنصاف الأقطار م ا ، م ب ، م حـ ، م ء الخ كان كل من المثلثات ا م ب ، ب م حـ ، حـ م ء الخ متساوى الساقين وكان كل منها ينطبق على الآخر تمام الانطباق

فاذا رمزنا بالرمز ن لعدد أضلاع المضلع المنتظم فكل من الزوايا ا م ب ، ب م حـ ، حـ م ء = $\frac{360}{ن}$

(فأولا) لرسم المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن داخل الدائرة نرسم الزاوية المركزية ا م ب بمقدار $\frac{360^\circ}{ن}$ فالوتر ا ب المقابل لها هو أحد أضلاع المضلع

ثم نركز فى ا أو فى ب وبنصف قطر يساوى ا ب نقسم المحيط الى أقواس متساوية ونصل بين نقط التقسيم بمستقيمات فتكون كلها متساوية وكذلك الزوايا المحصورة بينها تكون متساوية

(وثانيا) لرسم المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن خارج الدائرة نعين أولا النقط ا ، ب ، حـ ، ء الخ كما تقدم ويمد من كل منها مماس للدائرة فيحدث من تقاطع هذه المماسات شكل تسهل البرهنة على أن أضلاعه كلها متساوية وزواياه كذلك ويكون هو المضلع المطلوب

تنبيه — لايكون الرسم الهندسى بهذه الطريقة دقيقا إلا اذا أمكن رسم الزاوية $\frac{360^\circ}{ن}$ بالمسطرة والبرجل

تمارين

١ المطلوب رسم المضلعات المنتظمة الآتية داخل دائرة معلومة (نصف قطرها ٤ سنتيمترات (أولا) المسدس (ثانيا) المثمن (ثالثا) ذى الاثنى عشر ضلعا

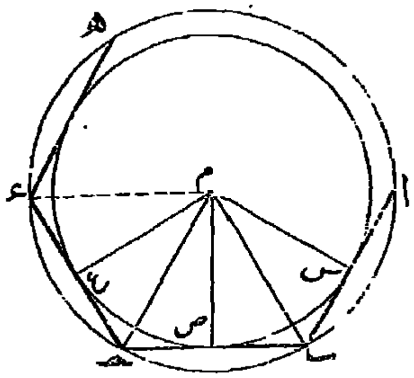
٢ ارسم خارج دائرة نصف قطرها ٣,٥ من السنتيمترات (أولا) مسدسا منتظما (ثانيا) مثمنا منتظما ثم بين صحة الرسم بالقياس وحقق ذلك بالبرهان

٣ اذا رسم مثلث متساوى الأضلاع ومسدس منتظم داخل دائرة ورمز لضلع المثلث بالحرف ا ولضلع المسدس بالحرف بَ فأثبت أن (أولا) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ مساحة المسدس (ثانيا) $ا^2 = ٣ بَ^2$

٤ ارسم مسبعا منتظما داخل دائرة نصف قطرها ٥ سنتيمترات باستعمال المنقلة واستخرج بالحساب مقدار احدى زواياه وقسها وقس أحد الأضلاع

عملية ٣١

المعلوم مضلع منتظم والمطلوب رسم دائرة داخله وأخرى خارجه



نفرض أن ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ الخ

أضلاع متوالية من المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن

وننصف الزاويتين ا ب حـ ، ب حـ ء بالمستقيمين

ب م ، حـ م فيتقاطعان فى م

فتكون م هى مركز كل من الدائرتين الداخلة والخارجة

البرهان — نصل م ء فمن المثلثين المتطابقين م حـ ب ، م حـ ء

نرى أن م ء ينصف ∠ حـ ء هـ ومنه ينتج أن جميع منصفات زوايا المضلع تتقاطع فى نقطة م

واذن يمكن البرهنة على أن

م ب = م حـ = م ء الخ (نظرية ٦)

∴ النقطة م مركز الدائرة المرسومة خارج المضلع

ثم ننزل من م الأعمدة م س ، م ص ، م ع الخ على ا ب ، ب حـ ، حـ ء الخ

ونبرهن على أن م س = م ص = م ع = الخ من المثلثات المتطابقة

ب س ، م ب ص الخ

فالنقطة م هى اذن مركز الدائرة المرسومة داخل المضلع

تمارين

١ المطلوب رسم مسدّس منتظم طول ضلعه ٤ سنتيمترات ورسم دائرة داخله وأخرى خارجه وحساب طول كل من قطريهما وقياسه لأقرب مليمتر

٢ أثبت أن مساحة المسدّس المنتظم المرسوم داخل الدائرة تساوى ثلاثة أرباع مساحة المسدّس المنتظم المرسوم خارجها

ثم استخرج مساحة مسدّس منتظم مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سنتيمترات لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع

٣ اذا فرض أن ا ب حـ مثلث متساوى الساقين مرسوم داخل دائرة وأن كلا من زاويتى القاعدة ب ، حـ ضعف زاوية الرأس فأثبت أن ب حـ يساوى ضلع المخمس المنتظم الذى يمكن رسمه داخل هذه الدائرة

٤ ارسم بغير المنقلة
(أولا) مسدسا منتظما
(ثانيا) مثمنا منتظما
طول ضلع كل منهما ٤ سنتيمترات واوجد مساحة كل بالتقريب

في محيط الدائرة

اذا قسنا محيط أى دائرة وقسنا قطرها وقسمنا طول الأول على طول الثانى وجدنا أن طول المحيط يشتمل على طول القطر $\frac{1}{7}$ ٣ مرات تقريبا أى أن

$$\frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}} = ٣\frac{١}{٧} \text{ تقريبا}$$

ويمكن البرهنة على أن هذه النسبة ثابتة فى جميع الدوائر

ويرمز لهذه النسبة عادة بالحرف ط وهو مقدار غير جذرى أى لا يمكن إيجاده إلا على وجه التقريب

وقد بحث بعض الرياضيين فى تعيين مقدار عظيم جدا من أرقامه العشرية لكنهم وجدوا أن المقدار ٣,١٤١٦ قريب من الحقيقة وكاف فى الاعمال وهو بسبعة أرقام عشرية (أى ٣,١٤١٥٩٢٦) أقرب الى الحقيقة طبعا

أما المقدار المتقدم $\frac{1}{7}$ ٣ فيساوى ٣,١٤٢٨ وهو أكبر من الحقيقة بكثير وفيه رقمان عشريان حقيقيان فقط

ولما كان $\frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}}$ = ط فعلى فرض أن س = نصف القطر

نجد أن $\frac{\text{المحيط}}{٢\ س}$ = ط ومن ذلك يحدث أن

المحيط = ٢ط س

فاذا أريد معرفة طول محيط أى دائرة معلوم نصف قطرها نضع فى المتساوية المذكورة بدل ط مقداره وهو إما $\frac{1}{7}$ ٣ أو ٣,١٤١٦ أو ٣,١٤١٥٩٢٦ على حسب درجة الدقة والقرب من الحقيقة المرادة فى الناتج

تنبيه — لا يسع المقام هنا الآن شرح الطرق النظرية التى بها يمكن تعيين مقدار ط الى الدرجة القريبة من الحقيقة ولكن بعمل مثل التجربة الآتية يسهل تعيينه الى رقمين عشريين

. نلف على أسطوانة قطعة من الورق مستطيلة الشكل بحيث ينطبق طرفاها كل على الآخر ثم نثقبهما وبعد ذلك ننزع الورقة ونسويها ونقيس البعد بين الثقبين فطوله يساوى طول المحيط ثم نقيس القطر ونقسم الناتج الأول على الثانى فخارج القسمة يعين مقدار ط

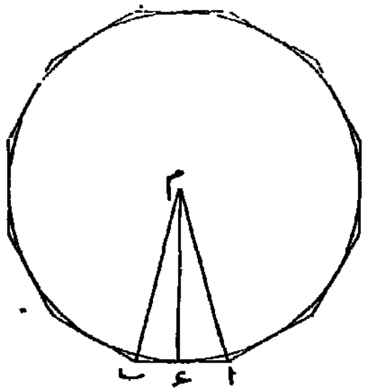
مثال ١ — عين مقدار ط من كل من الفروض المذكورة ثم أوجد متوسط النتائج الثلاثة

المحيط	القطر	مقدار ط
١٦ سنتيمترا	٥,١ من السنتيمترات	
٢٢,٣ من السنتيمترات	٧,١ « «	
٣٣,٨ « «	١٠,٨ « «	

مثال ٢ — خيط طوله ٧٥,٤ من البوصات أمكن لفه ٢٠ مرة على اسطوانة قطرها ١,٢ من البوصات مامقدار ط باعتبار أن كل لفة تساوى محيط قاعدة الأسطوانة

مثال ٣ — عجلة قطرها ٢٨ بوصة تدور ٤٠٠ دورة اذا قطعت مسافة ٩٧٧ ياردة مامقدار ط

فى مساحة الدائرة



اذا فرضنا أن ا ب أحد أضلاع المضلع الذى عدد أضلاعه ن المرسوم خارج الدائرة التى مركزها م ونصف قطرها س

فمساحة المضلع = ن × Δ ا م ب

= ن × $\frac{1}{2}$ ا ب × م ء

= $\frac{1}{2}$ (محيط المضلع) × س

وهذا حقيق مهما تضاعف عدد أضلاع المضلع

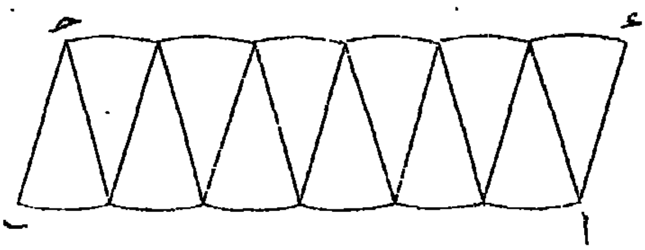
ويشاهد أنه كلما ضوعف عدد أضلاع المضلع اقترب محيطه من محيط الدائرة ومساحته من مساحتها أى أن الفرق بين المحيطين وكذلك الفرق بين المساحتين يأخذ فى الصغر حتى اذا ضوعف عدد الأضلاع الى مالا نهاية صغر هذا الفرق الى أن يقرب من الصفر فيمكننا اذن أن نعتبر أن محيط الدائرة هو محيط المضلع المنتظم الذى ضوعف عدد اضلاعه الى مالا نهاية ومساحتها مساحة المضلع المذكور

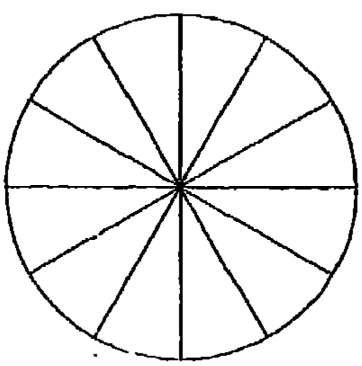
وعلى هذا فمساحة الدائرة = $\frac{1}{2}$ × محيط الدائرة × س

= $\frac{1}{2}$ × ٢ ط س × س

= ط س^{2}

طريقة أخرى لايجاد مساحة الدائرة





اذا فرضنا أن الدائرة منقسمة الى عدد زوجى من القطاعات ذات الزوايا المركزية المتساوية ورمزنا لهذا العدد بالحرف ن ووضعنا هذه القطاعات الواحد بجانب الآخر كما هو مبين فى الشكل

يحدث أن مساحة الدائرة = مساحة الشكل ا ب ح ء

وهذه المتساوية حقيقية مهما تضاعف عدد القطاعات

ويشاهد أنه كلما ضوعف عدد هذه القطاعات صغر كل قوس من أقواسها وعلى ذلك

(أولا) يقترب كل من الخطين ا ب ، ح ء المكونين من الأقواس قربا كليا الأول من المستقيم ا ب والثاني من المستقيم ح ء

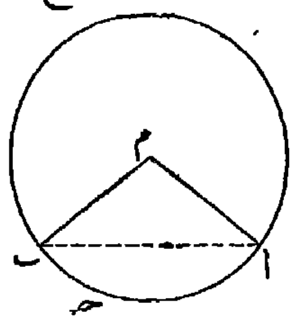
(ثانيا) تقترب كل من الزاويتين ب ، ء من القائمة

أي أنه اذا ضوعفت ن الى ما لانهاية تحول الشكل الى مستطيل قاعدته طول نصف محيط الدائرة وارتفاعه نصف قطرها

∴ مساحة الدائرة = $\frac{١}{٢}$ × المحيط × نصف القطر

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ ط س × س = ط س^{٢}

مساحة القطاع



اذا كانت الزاوية المحصورة بين نصفي قطرين تساوي ١° فان ضلعيها يحصران

(أولا) قوسا طوله $\frac{١}{٣٦٠}$ من المحيط

(ثانيا) قطاعا مساحته = $\frac{١}{٣٦٠}$ من مساحة الدائرة

∴ اذا كانت الزاوية ا م ب = ء من الدرجات يحدث

(أولا) أن القوس ا ب = $\frac{ء}{٣٦٠}$ من المحيط

(ثانيا) أن القطاع ا م ب = $\frac{ء}{٣٦٠}$ من مساحة الدائرة

= $\frac{ء}{٣٦٠}$ من ($\frac{١}{٢}$ محيط الدائرة × نصف القطر)

= $\frac{١}{٢}$ القوس ا ب × نصف القطر

مساحة القطعة

لايجاد مساحة القطعة الصغرى نستخرج مساحة المثلث الذي أضلاعه وتر القطعة ونصفا قطري الدائرة ثم نطرح هذه المساحة من مساحة القطاع المشترك مع القطعة في القوس فتكون مساحة القطعة ا ب ح = القطاع م ا ح ب — ∆ ا م ب

ولايجاد مساحة القطعة الكبرى نستخرج مساحة القطعة الصغرى كما تقدم ونطرح هذه المساحة من مساحة الدائرة

تمارين

(يراعى فى أخذ مقدار ط فى التمارين الآتية درجة التقريب المطلوبة فى الناتج)

١ المطلوب إيجاد طول محيطى دائرتين لاقرب مليمتر اذا كان نصف قطر أحدهما ٤,٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١٠٠ سنتيمتر

٢ أوجد لأقرب مليمتر مربع مساحة دائرتين نصف قطر إحداهما ٥,٨ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٢٦,٣ من السنتيمترات

٣ دائرة داخل مربع طول ضلعه ٣,٦ من السنتيمترات أوجد طول محيطها ومساحتها الى رقمين عشريين

٤ مربع داخل دائرة نصف قطرها ٧ سنتيمترات أوجد الفرق بين مساحتيهما لأقرب سنتيمتر مربع

٥ أوجد لأقرب مليمتر مربع مساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز نصف قطر إحداهما ١١,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٨,٦ من السنتيمترات

٦ بين أن مساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز تساوى مساحة دائرة نصف قطرها طول المماس الممدود من أى نقطة على محيط الدائرة الكبرى الى الدائرة الصغرى

٧ مستطيل داخل دائرة قاعدته ٨ سنتيمترات وارتفاعه ٦ سنتيمترات أوجد مجموع مساحات القطع الأربع الخارجة عنه لأقرب عشر من السنتيمتر المربع

٨ ماطول ضلع المربع (لأقرب عشر من البوصة) الذى مساحته تساوى مساحة دائرة نصف قطرها ٥ بوصات

٩ مساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز ٢٢ سنتيمترا مربعا وعرضها سنتيمتر واحد ماطول نصفى القطرين فى الدائرتين بالتقريب مع العلم بأن ط $= \frac{٢٢}{٧}$

١٠ ماالفرق لأقرب سنتيمتر مربع بين مساحة الدائرة المرسومة خارج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سنتيمترات وبين مساحة الدائرة المرسومة داخله

١١ ارسم على ورق المربعات دائرتين البعدان الاحداثيان لمركزيهما (٣ ، ٠) و(٠ ، ١,٦) من السنتيمترات ونصف قطر أولاهما ١,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الثانية سنتيمتران ثم برهن على أن الدائرتين تتماسان وأوجد بالتقريب محيط كل منهما ومساحته

١٢ ارسم دائرة نصف قطرها سنتيمتران والبعدان الاحداثيان لمركزها (٣,٢ ، ٢,٤) من السنتيمترات ثم ارسم دائرتين أخريين مركز كل منهما نقطة الأصل ونصف قطر الأولى سنتيمتران ونصف قطر الثانية ٦ سنتيمترات وبرهن على أن كلا منهما تمس الدائرة الأولى

تمارين على الدوائر المرسومة داخل المثلث وخارجه والمماسة له من الخارج

(مسائل نظرية)

١ ارسم دائرة تمس مستقيمين متوازيين ومستقيما آخر قاطعا لهما ثم بين أنه يمكن رسم دائرتين متساويتين فى هذه الحالة

٢ اذا ساوى من مثلث قاعدته وزاوية رأسه نظيرتيهما من مثلث آخر كانت الدائرتان المرسومتان خارج المثلثين متساويتين

٣ ا ب ح مثلث ، ى مركز الدائرة المرسومة داخله ، ر مركز الدائرة المرسومة خارجه برهن على أنه لو كانت النقط ا ، ى ، ر على استقامة واحدة لكان ا ب = ا ح

٤ مجموع قطرى الدائرتين المرسومة إحداهما داخل مثلث قائم الزاوية والأخرى خارجه يساوى مجموع ضلعى القائمة

٥ اذا كانت الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح تمس أضلاعه فى ء ، هـ ، و فان زوايا المثلث ء هـ و تساوى على الترتيب $٩٠° - \frac{ا}{٢}$ ، $٩٠° - \frac{ب}{٢}$ ، $٩٠° - \frac{ح}{٢}$

٦ اذا فرضنا أن ى مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح ، $ى_١$ مركز الدائرة المماسة للضلع ب ح وامتداد الضلعين الآخرين فانه يمكن أن يمر بالنقط ى ، ب ، $ى_١$ ، ح محيط دائرة

٧ الفرق بين أى ضلعين من مثلث يساوى الفرق بين جزأى الضلع الثالث اللذين ينقسم اليهما بنقطة تماس الدائرة الداخلة

٨ فى المثلث ا ب ح النقطة ى مركز الدائرة الداخلة ، ر مركز الدائرة الخارجة برهن على أن المستقيم ى ر تقابله زاوية رأسها فى ا تساوى نصف الفرق بين زاويتى القاعدة

وبذا برهن على أنه اذا أنزل العمود ا ء على ب ح كان ا ى منصفا لزاوية ء ا ر

٩ قطرا الشكل الرباعى ا ب ح ء متقاطعان فى م برهن على أنه اذا وصل بين مراكز الدوائر المرسومة خارج المثلثات ا م ب ، ب م ح ، ح م ء ، ء م ا يحدث شكل متوازى الأضلاع

١٠ ا ب ح مثلث والنقطة ى مركز الدائرة الداخلة برهن على أنه اذا وصل ا ى ومد على استقامته حتى قطع محيط الدائرة المرسومة خارج المثلث فى م كانت هذه النقطة مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ب ى ح

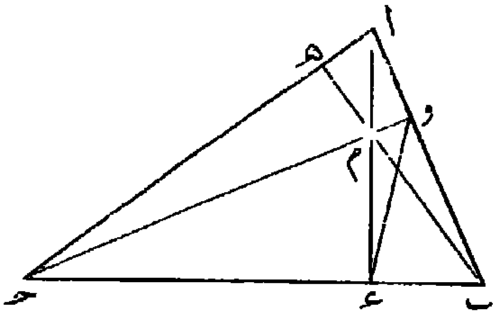
١١ المطلوب رسم المثلث المعلوم منه القاعدة والارتفاع ونصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

١٢ اذا تماست من الخارج ثلاث دوائر مراكزها ا ، ب ، ح مثنى فى ء ، هـ ، و كانت الدائرة الداخلة للمثلث ا ب ح هى عين الدائرة الخارجة للمثلث ء هـ و

نظريات وأمثلة على الدوائر والمثلثات

ملتقى ارتفاعات المثلث

١ الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة لها تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة



فى Δ ا ب حـ أنزلنا من الرأس ا العمود ا ء على الضلع ب حـ ومن حـ العمود حـ و على الضلع ا ب فيتلاقى هذان العمودان فى م

فاذا وصلنا ب م ومددناه على استقامته حتى قابل ا حـ فى هـ فانه يطلب البرهنة على أن ب هـ عمود على ا حـ

لذلك نصل ء و

فمن حيث ان الزاويتين م و ب ، م ء ب قائمتان

∴ النقط م ، و ، ب ، ء يمر بها محيط دائرة واحد

∴ ∠ ب و ء = ∠ ب م ء لأنهما فى قطعة واحدة

= ∠ ا م هـ للتقابل بالرأس

ومن حيث ان الزاويتين ا و حـ ، ا ء حـ قائمتان

∴ النقط ا ، و ، ء ، حـ يمر بها محيط دائرة واحد

∴ ∠ ء و حـ = ∠ ء ا حـ لأنهما فى قطعة واحدة

∴ ∠ ا م هـ + ∠ م ا هـ = ∠ ب و ء + ∠ ء و حـ

= ں

∴ الزاوية الثالثة ا هـ م = ں (نظرية ١٦)

أى أن ب هـ عمود على ا حـ

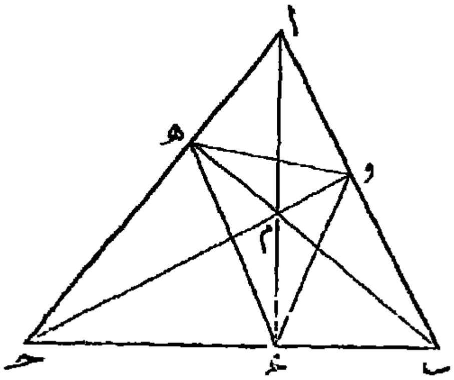
فالأعمدة ا ء ، ب هـ ، حـ و اذن تتلاقى جميعا فى النقطة م وهو المطلوب

تعريفان

(١) نقطة تلاقى الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه تسمى ملتقى الارتفاعات

(٢) المثلث الحادث من وصل مواقع الارتفاعات يسمى مثلث المواقع

٢ الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث الحاد الزوايا على الأضلاع المقابلة لها تنصف زوايا مثلث المواقع



في المثلث الحاد الزوايا ا ب ح أنزلنا الأعمدة ا د ، ب هـ ، ح و على الأضلاع من الرؤوس المقابلة لها فتقاطعت في م ثم وصلنا بين مواقع هذه الأعمدة بمستقيمات فحدث مثلث المواقع د هـ و ويراد إثبات أن ا د ، ب هـ ، ح و تنصف الزوايا و د هـ ، د هـ و ، هـ و د

البرهان — النقط م ، د ، ب ، و يمر بها محيط دائرة واحد كما تقدم في النظرية السابقة

∴ ∠ م د و = ∠ م ب و لأنهما في قطعة واحدة

وكذلك النقط م ، د ، ح ، هـ يمر بها محيط دائرة واحد

∴ ∠ م د هـ = ∠ م ح هـ لأنهما في قطعة واحدة

لكن ∠ م ب و = ∠ م ح هـ لأن كلا منهما تمم ∠ ب ا ح

∴ ∠ م د و = ∠ م د هـ

وبالطريقة عينها يبرهن على أن ب هـ ينصف ∠ د هـ و ، ح و ينصف ∠ هـ و د وهو المطلوب

نتيجة ١ — كل ضلعين من مثلث المواقع متلاقيين على ضلع من المثلث الأصلي يصنعان مع هذا الضلع زاويتين متساويتين

لأن الزاوية و د ب تمم ∠ و د م

∴ تمم ∠ و ب م

لكن ∠ ب ا هـ تمم ∠ و ب م

∴ ∠ و د ب = ∠ ب ا هـ التي هي ∠ ب ا ح

وبالطريقة عينها يمكن إثبات أن ∠ هـ د ح = ∠ ب ا ح

∴ ∠ و د ب = ∠ هـ د ح = ∠ ا

وبالطريقة عينها يمكن إثبات أن

∠ د هـ ح = ∠ و هـ ا = ∠ ب

، ∠ د و ب = ∠ هـ و ا = ∠ ح

نتيجة ٢ — زوايا المثلثات د ب و ، ا هـ و ، د هـ ح متساوية وتساوي زوايا المثلث ا ب ح

تنبيه — اذا كانت الزاوية ب ا ح منفرجة فان العمودين ب هـ ، ح و ينصفان زاويتي مثلث المواقع الخارجتين

تمارين

١ م ملتقى الارتفاعات فى المثلث ا ب حـ مددنا العمود ا ء حتى قابل الدائرة المرسومة خارج المثلث فى ع برهن على أن م ء = ء ع

٢ أضلاع المثلث الحاد الزوايا تنصف الزوايا الخارجة لمثلث المواقع أما المثلث المنفرج الزاوية فان ضلعى المنفرجة فيه ينصفان زاويتين داخلتين

٣ م ملتقى الارتفاعات فى المثلث ا ب حـ برهن على أن الزاويتين ب م حـ ، ب ا حـ متكاملتان

٤ اذا كانت م ملتقى الارتفاعات فى المثلث ا ب حـ فان كلا من النقط الأربع م ، ا ، ب ، حـ ملتقى الارتفاعات فى المثلث الذى رؤوسه النقط الثلاث الأخرى

٥ كل من الدوائر الثلاث التى تمر برأسى مثلث وملتقى ارتفاعاته تساوى الدائرة الخارجة المارة برؤوسه

٦ النقطتان ء ، هـ مفروضتان على نصف محيط دائرة مرسوم على المستقيم ا ب فاذا وصلنا ء ا ، ب هـ فتقاطعا (هما أو امتدادهما) فى ع ثم وصلنا ا هـ ، ب ء فتقاطعا (هما أو امتدادهما) فى و كان و ع عمودا على ا ب

٧ ا ب حـ مثلث ، م ملتقى ارتفاعاته فاذا كان ا ء قطر الدائرة المارة برؤوسه كان ب م حـ ء متوازى الأضلاع

٨ اذا وصلنا بين ملتقى ارتفاعات المثلث وبين منتصف القاعدة بمستقيم ومددناه على استقامته حتى قابل الدائرة المرسومة على المثلث فى نقطة كانت هذه النقطه منتهى القطر المار برأس المثلث

٩ اذا مددنا العمود النازل من رأس المثلث على قاعدته حتى قابل محيط الدائرة المارة برؤوسه فى ل ثم وصلنا من ملتقى الارتفاعات الى منتصف القاعدة بمستقيم ومددناه على استقامته أيضا حتى قابل المحيط فى ن كان ل ن موازيا للقاعدة

١٠ المستقيم الواصل من ملتقى الارتفاعات الى أى رأس فى المثلث يساوى ضعف العمود النازل من مركز الدائرة المرسومة خارجه على الضلع المقابل لهذا الرأس

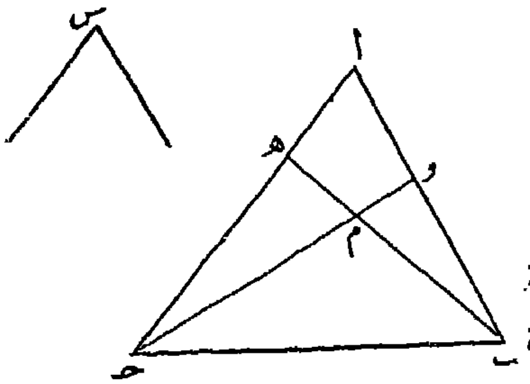
١١ اذا رسمنا ثلاث دوائر كل منها يمر بملتقى ارتفاعات مثلث ورأسين منه فان المثلث الحادث من توصيل مراكز هذه الدوائر ينطبق تمام الانطباق على المثلث الأصلى

١٢ ارسم المثلث المعلوم منه رأس وملتقى ارتفاعاته ومركز الدائرة المرسومة خارجه

المحـال الهندسية

٣ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لملتقى ارتفاعات المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية الرأس

نفرض أن ب ح القاعدة المعلومة ، س زاوية الرأس



فاذا فرضنا أن ب ا ح مثلث ما مرسوم على ب ح وزاوية رأسه ا تساوى الزاوية المعلومة س

وأنزلنا من ب ، ح العمودين ب ه ، ح و فتقاطعا فى م التى هى ملتقى الارتفاعات

فانه يطلب إيجاد المحل الهندسى للنقطة م

البرهان — من حيث ان كلا من زاويتى م ه ا ، م و ا قائمة

∴ النقط م ، ه ، ا ، و يمر بها محيط دائرة

∴ ∠ و م ه تكمل ∠ ا

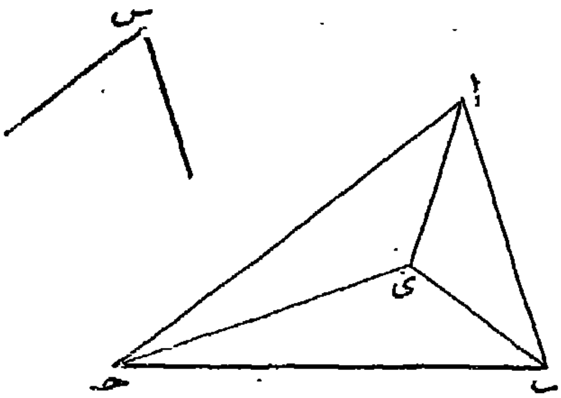
∴ ∠ ب م ح المقابلة بالرأس تكمل ∠ ا

ولكون ∠ ا تساوى ∠ س دائما مهما تحركت النقطة ا فمقدارها ثابت ومكملتها ثابتة كذلك

أى أن قاعدة Δ ب م ح معلومة وزاوية رأسه ثابتة المقدار

فالمحل الهندسى لرأسه م هو قوس القطعة التى وترها ب ح والتى تقبل زاوية تساوى مكملة ∠ س

٤ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة المرسومة داخل المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية الرأس



اذا فرضنا أن ب ا ح أحد أوضاع المثلث المرسوم على القاعدة المعلومة ب ح وزاوية رأسه ا تساوى الزاوية المعلومة س

وأن منصفات زواياه ا ى ، ب ى ، ح ى تقاطعت فى النقطة ى مركز الدائرة الداخلة

فانه يطلب إيجاد المحل الهندسى للنقطة ى

البرهان — نرمز لزوايا Δ ا ب ح بالحروف ا ، ب ، ح ولزاوية ب ى ح بالحرف ى فيحدث

فى Δ ب ى ح أن ى + $\frac{1}{2}$ ب + $\frac{1}{2}$ ح = ٢ ق ... ... (١) (نظرية ١٦)

ومن Δ ا ب ح يحدث أن ا + ب + ح = ٢ ق

أى أن $\frac{1}{2}$ ا + $\frac{1}{2}$ ب + $\frac{1}{2}$ ح = ق ... ... (٢)

وبطرح (٢) من (١)

يحدث أن ى − $\frac{1}{2}$ ا = ق

أو ى = ق + $\frac{1}{2}$ ا

ولكون ـ ا ثابتة المقدار لأنها تساوى س دائما مهما تحركت النقطة ا

∴ ـ ى ثابتة كذلك

فالمحل الهندسى للنقطة ى اذن هو قوس القطعة التى وترها ب ح المعلوم والتى تقبل زاوية ثابتة مقدارها يساوى(ں + ½ س)

تمارين على المحال الهندسية

١ مثلث معلوم منه القاعدة ب ح وزاوية الرأس ا والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تمس ضلع المثلث ب ح وامتداد الضلعين الآخرين

٢ ا ب مستقيم رسمنا من نهايتيه المستقيمين المتوازيين ا ل ، ب م والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع منصفى الزاويتين ب ال ، ا ب م

٣ دائرة يراد إيجاد المحل الهندسى لمنتصفات أوتارها المارّة بنقطة واحدة سواء كانت هذه النقطة داخل الدائرة أو على محيطها أو خارجها

٤ ماهو المحل الهندسى لنقط تماس المماسات الممدودة من نقطة مفروضة الى جملة دوائر متحدة المركز

٥ ماهو المحل الهندسى لنقطة تقاطع مستقيمين يمران بنقطتين معلومتين على محيط دائرة ويحصران بينهما من المحيط طولا معلوما

٦ ا ، ب نقطتان على محيط دائرة ل ڡ قطر فيها ما هو المحل الهندسى لنقطة تقاطع ل ا ، ڡ ب

٧ ا ب ح مثلث مرسوم على القاعدة المعلومة ب ح وزاوية رأسه ثابتة المقدار مددنا ب ا على استقامته الى ڡ بحيث يكون ب ڡ مساويا مجموع ضلعى زاوية الرأس ماهو المحل الهندسى للنقطة ڡ

٨ ا ب وتر ثابت فى دائرة ، ا ح وتر متحرك فيها مارّ بالنقطة ا فاذا أكملنا متوازى الأضلاع ب ح فما هو المحل الهندسى لنقطة تقاطع قطريه

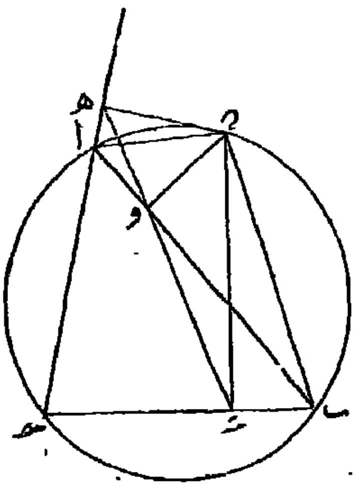
٩ ل ڡ مستقيم طرفاه على مستقيمين متعامدين يتحرك بينهما أقمنا من ل العمود ل س على أحد المستقيمين المتعامدين ومن ڡ العمود ڡ س على المستقيم العمودى الآخر فتقابل ل س ، ڡ س فى نقطة س ماهو المحل الهندسى لهذه النقطة

١٠ دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب فرضنا على أحد المحيطين نقطة مثل ڡ ومددنا منها مستقيمين يمران بالنقطتين ا ، ب ويقابلان المحيط الآخر فى س ، ص ثم وصلنا المستقيمين ا ص ، ب س فتقاطعا فى نقطة أوجد محلها الهندسى

١١ دائرتان متقاطعتان فى ا ، ب رسمنا مستقيما مارا بالنقطة ا وطرفه ح على أحد المحيطين ، ء على المحيط الثانى ثم رسمنا مستقيما آخر مارا بالنقطة ا أيضا طرفه ل على المحيط الأول ، ڡ على الثانى أوجد المحل الهندسى لنقطة تقاطع ح ل ، ڡ ء على فرض أن المستقيم ح ا ء ثابت لايتحرك

خط سمسون

٥ مواقع الأعمدة النازلة على أضلاع المثلث من أى نقطة على محيط الدائرة المرسومة خارجه على استقامة واحدة



اذا كانت ن النقطة المفروضة على محيط الدائرة المرسومة خارج Δ ا ب ح و ن ء و ن هـ و ن و الأعمدة النازلة منها على أضلاعه فانه يطلب إثبات أن النقط ء و و و هـ على استقامة واحدة

لذلك نصل هـ و و و ء ثم نبرهن على أن و ء و و هـ على استقامة واحدة فنصل ن ا و ن ب

البرهان — من حيث ان كلا من الزاويتين ن و ا و ن هـ ا قائمة

∴ النقط ن و و و ا و هـ يمر بها محيط دائرة واحد

∴ ∠ ن و هـ = ∠ ن ا هـ لأنهما فى قطعة واحدة

∴ ∠ ن و هـ تكمل ∠ ن ا ح

و ∠ ن ب ح تكمل ∠ ن ا ح

لأن النقط ا و ن و ب و ح على محيط دائرة واحد

∴ ∠ ن و هـ = ∠ ن ب ح التى هى ∠ ن ب ء

ومن حيث ان كلا من الزاويتين ن و ب و ن ء ب قائمة

∴ النقط ن و و و ء و ب يمر بها محيط دائرة واحد

∴ ∠ ن ب ء تكمل ∠ ن و ء

∴ ∠ ن و هـ تكمل ن و ء

∴ و ء على استقامة و هـ

ملاحظة المستقيم ء و هـ يسمى مستقيم المواقع للنقطة ن بالنسبة الى المثلث ا ب ح وهو المعروف بخط سمسون

تمارين

١ أنزلنا من نقطة ت على محيط دائرة مارة برؤوس المثلث ا ب ح العمودين ت ى ، ت هـ على الضلعين ب ح ، ا ح ثم وصلنا هـ ى فاذا قطع هذا المستقيم أو امتداده الضلع ا ب فى و كان ت و عمودا على ا ب

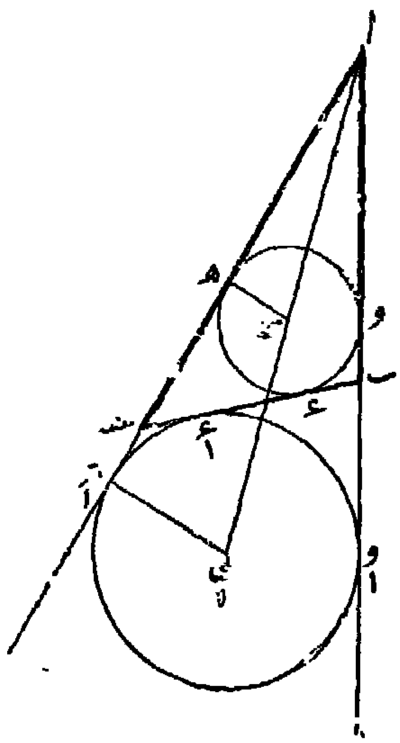
٢ المطلوب إيجاد المحل الهندسى للنقطة التى تسير على شرط أن تكون مواقع الأعمدة النازلة منها على أضلاع مثلث معلوم على استقامة واحدة

٣ ا ب ح ، ا بَ حَ مثلثان متحدان فى زاوية الرأس ا رسمنا دائرة مارة برؤوس كل منهما فتقاطع المحيطان فى ت برهن على أن مواقع الأعمدة النازلة من هذه النقط على الأضلاع ا ب ، ا ح ، ب ح ، بَ حَ على استقامة واحدة

٤ اذا رسمنا مثلثا داخل دائرة ووصلنا بمستقيم من ملتقى ارتفاعاته الى نقطة ما مثل ت على المحيط كان مستقيم المواقع (خط سمسون) لهذه النقطة منصفا للمستقيم المذكور

المثلث والدوائر المتعلقة به

٦ د ، هـ ، و نقط تماس الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب حـ ، د_1 ، هـ_1 ، و_1 نقط تماس الدائرة الماسة ب حـ وامتداد الضلعين الآخرين فاذا رمزنا لأضلاع المثلث بالرموز اَ ، بَ ، حـَ وبالرمز ع لنصف مجموع أضلاعه وبالرمز س لنصف قطر الدائرة الداخلة ، س_1 لنصف قطر الدائرة التي تمس ب حـ وامتداد الضلعين الآخرين



فانه يراد إثبات ما يأتي

(أولا) ان ا هـ = ا و = ع − اَ
، ب د = ب و = ع − بَ
، حـ د = حـ هـ = ع − حـَ

(ثانيا) ان ا هـ_1 = ا و_1 = ع

(ثالثا) ان حـ د_1 = حـ هـ_1 = ع − بَ
، ب د_1 = ب و_1 = ع − حـَ

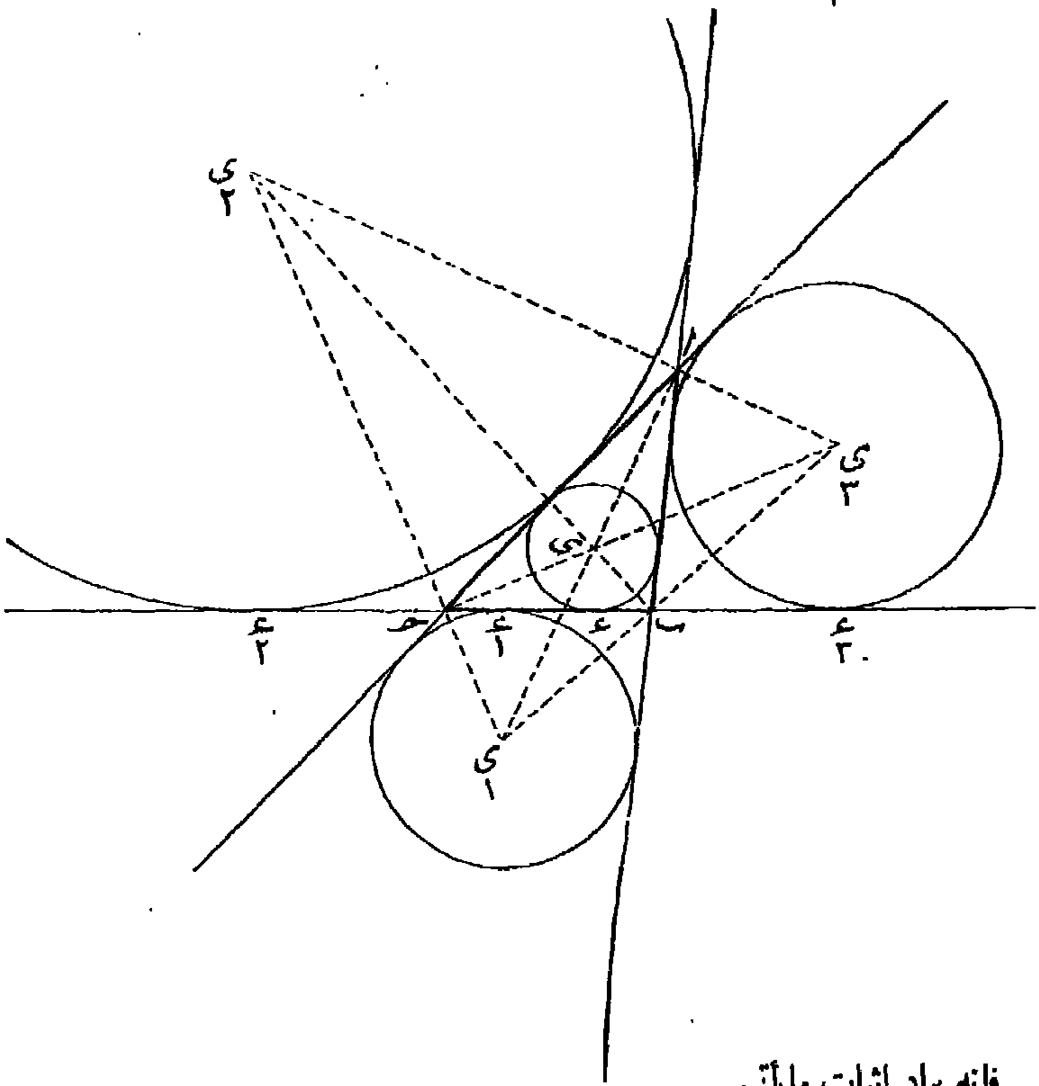
(رابعا) ان ب د = حـ د_1 ، حـ د = ب د_1

(خامسا) ان هـ هـ_1 = و و_1 = اَ

(سادسا) ان مساحة Δ ا ب حـ = س × ع
= س_1 (ع − اَ)

(سابعا) بعد رسم الشكل المتقدم في حالة ما اذا كانت < ب قائمة يبرهن على أن
س = ع − بَ
، س_1 = ع − حـَ

٧ اذا كانت ى مركز الدائرة الداخلة للمثلث ا ب حـ
، ى١ مركز الدائرة المماسة للضلع ا وامتداد الضلعين الآخرين
، ى٢ « « « ب « « «
، ى٣ « « « حـ « « «



فانه يراد إثبات ما يأتى
(أولا) أن (١) النقط ا ، ى ، ى١ على استقامة واحدة
(٢) « ب ، ى ، ى٢ « « «
(٣) « حـ ، ى ، ى٣ « « «
(ثانيا) ان (١) « ى٢ ، ا ، ى٣ « « «
(٢) « ى٣ ، ب ، ى١ « « «
(٣) « ى١ ، حـ ، ى٢ « « «
(ثالثا) ان المثلثات ب ى١ حـ ، حـ ى٢ ا ، ا ى٣ ب متساوية فى الزوايا
(رابعا) ان زوايا Δ ى١ ى٢ ى٣ تساوى زوايا المثلث الحادث من وصل نقط تماس الدائرة الداخلة
(خامسا) ان كلا من النقط الأربع ى ، ى١ ، ى٢ ، ى٣ ملتقى ارتفاعات المثلث الذى رؤوسه النقط الثلاث الأخرى
(سادسا) ان الدوائر الاربع المار كل منها بأى ثلاث من النقط ى ، ى١ ، ى٢ ، ى٣ متساوية

تمارين

١ برهن على أنه اذا كانت الدوائر التى مراكزها $ى$ ، $ى_1$ ، $ى_2$ ، $ى_3$ تمس $ب ح$ فى النقط $د$ ، $د_1$ ، $د_2$ ، $د_3$ (الشكل فى صفحة ٢٣٤) حدث

(أولا) أن $د د_2 = د_1 د_3 = \bar{ب}$

(ثانيا) أن $د د_3 = د_1 د_2 = \bar{ح}$

(ثالثا) أن $د_2 د_3 = \bar{ب} + \bar{ح}$

(رابعا) أن $د د_1 = \bar{ب} \sim \bar{ح}$

٢ برهن على أن ملتقى ارتفاعات المثلث هو مركز الدائرة المرسومة داخل مثلث المواقع وأن كلا من رؤوس المثلث الأول مركز لدائرة تمس مثلث المواقع من الخارج

٣ معلوم من مثلث القاعدة وزاوية الرأس ويراد إيجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تمس هذه القاعدة وامتداد الضلعين الآخرين

٤ اذا علم من المثلث القاعدة وزاوية الرأس فمركز الدائرة المرسومة خارجه مارة برؤوسه ثابت

٥ معلوم من مثلث القاعدة $ب ح$ وزاوية الرأس $ا$ والمطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تمس $ا ب$ وامتداد الضلعين الآخرين

٦ انشئ مثلثا معلوما منه القاعدة وزاوية الرأس ونقطة تماس الدائرة المرسومة داخله بالقاعدة

٧ انشئ مثلثا معلوما منه القاعدة وزاوية الرأس والنقطة التى تمس فيها القاعدة (أو امتدادها) احدى الدوائر المرسومة ماسة المثلث من الخارج

٨ اذا كانت $ى$ مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ، $ى_1$ ، $ى_2$ ، $ى_3$ مراكز الدوائر التى تمسه من الخارج كان محيط الدائرة المرسومة خارج المثلث منصفا كلا من $ى ى_1$ ، $ى ى_2$ ، $ى ى_3$

٩ $ا ب ح$ مثلث ، $ى_2$ مركز الدائرة التى تمس $ا ح$ وامتداد الضلعين الآخرين ، $ى_3$ مركز الدائرة التى تمس $ا ب$ وامتداد الضلعين الآخرين برهن على أن النقط $ب$ ، $ح$ ، $ى_2$ ، $ى_3$ على محيط دائرة مركزها على محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث $ا ب ح$

١٠ المطلوب رسم ثلاث دوائر معلومة مراكزها تتماس مثنى كم حلا لهذه المسألة

١١ المعلوم مراكز الدوائر الثلاث التى تمس مثلثا من الخارج والمطلوب إنشاء هذا المثلث

١٢ معلوم مركز الدائرة المرسومة داخل مثلث ومركزا دائرتين تمسانه من الخارج و يراد إنشاء المثلث

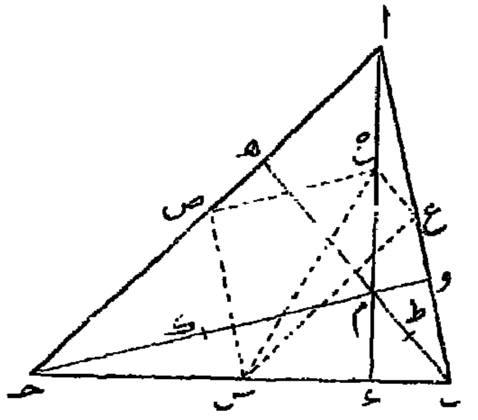
١٣ المعلوم زاوية الرأس من مثلث ومحيطه ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله والمطلوب إنشاؤه

١٤ المعلوم زاوية الرأس من مثلث ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله وطول العمود النازل من الرأس على القاعدة والمطلوب إنشاؤه

١٥ ى مركز الدائرة المرسومة داخل ∆ ا ب حـ برهن على أن مراكز الدوائر المارة برؤوس المثلثات ب ى حـ ، حـ ى ا ، ا ى ب تقع على محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب حـ

نظرية النقط التسع

٨ محيط الدائرة المار بمنتصفات أضلاع المثلث يمر بمواقع ارتفاعاته و بمنتصفات الأبعاد المحصورة بين ملتقى الارتفاعات ورؤوس المثلث



اذا فرضنا أن ا ب حـ المثلث المعلوم وأن النقط س ، ص ، ع منتصفات الأضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب والنقط ء ، هـ ، و مواقع الارتفاعات النازلة على الأضلاع من الرؤوس ا ، ب ، حـ والنقطة م ملتقى الارتفاعات ، ح ، ط ، ك منتصفات م ا ، م ب ، م حـ

فانه يطلب إثبات أن النقط التسع س ، ص ، ع ، ء ، هـ ، و ، ح ، ط ، ك يمر بها جميعا محيط دائرة واحد

لذلك نصل س ص ، س ع ، س ح ، ص ح ، ع ح

ففى المثلث ا حـ م

لكون ا ص = ص حـ ، ا ح = ح م

∴ ص ح يوازى حـ م (تمرين ٢ صفحة ٦٩)

وفى المثلث حـ ا ب لكون حـ ص = ص ا ، حـ س = س ب

∴ ص س يوازى ا ب

ثم اذا مدّ حـ م على استقامته كان عمودا على ا ب

وعليه ∠ س ص ح قائمة وكذلك ∠ س ع ح

∴ النقط س ، ص ، ح ، ع يمر بها جميعا محيط دائرة واحد

أى أن ح تقع على المحيط المار بالنقطة س ، ص ، ع وأن س ح قطر لهذه الدائرة

وكذلك يمكن إثبات أن ط ، ك تقعان على هذا المحيط

ومن حيث ان ∠ ح ء س قائمة

∴ محيط الدائرة الذى قطرها س ح يمر بالنقطة ء

وكذلك يمكن إثبات أن هـ ، و تقعان على هذا المحيط

فالنقط س ، ص ، ع ، ء ، هـ ، و ، ح ، ط ، ك كلها على محيط دائرة واحد وهو المطلوب

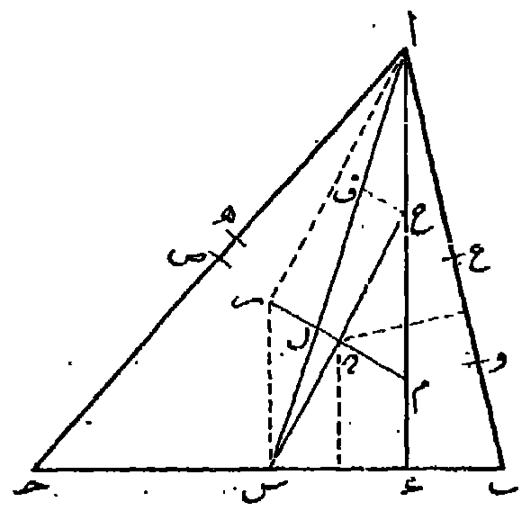
ملاحظة — بناء على هذه الخاصة تسمى الدائرة المارة بمنتصفات أضلاع المثلث بدائرة النقط التسع ومن حيث ان هذه الدائرة تمر برؤوس مثلث المواقع يمكن استنتاج كثير من خواصها

فيمكن البرهنة على أن

أولا — مركز دائرة النقط التسع هو منتصف المستقيم الواصل بين ملتقى ارتفاعات المثلث ومركز الدائرة المرسومة خارجه

ثانيا — قطر دائرة النقط التسع يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث

ثالثا — النقط الأربع : ملتقى المستقيمات المتوسطة فى المثلث ومركز الدائرة المرسومة خارجه ومركز دائرة النقط التسع وملتقى الارتفاعات كل هذه على استقامة واحدة



فاذا فرض فى Δ ا ب حـ أن س ، ص ، ع منتصفات أضلاعه ، ء ، هـ ، و مواقع ارتفاعاته النازلة من الرؤوس عليها ، م ملتقى الارتفاعات ، ر مركز الدائرة الخارجة ، ن مركز دائرة النقط التسع

فانه يطلب البرهنة على أن

أوّلا — ن منتصف م ر

لأنه معلوم أن العمود المقام على ء س من وسطه ينصف م ر (نظرية ٢٢)

وكذلك العمود المقام على و ع من وسطه ينصف م ر

أى أن هذين العمودين يلتقيان فى منتصف م ر

ومن حيث ان ء س ، و ع وتران فى دائرة النقط التسع

∴ نقطة تلاقى العمودين المقامين على هذين الوترين من وسطيهما هى مركز هذه الدائرة (نظرية ٣١ نتيجة ١)

∴ المركز ن هو منتصف م ر وهو المطلوب

ثانيا — قطر دائرة النقط التسع يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث

يؤخذ من النظرية السابقة ان س ع. قطر دائرة النقط التسع

∴ منتصف المستقيم س ع. هو مركز الدائرة

ولكن ثبت مما تقدّم أن منتصف المستقيم م ر هو مركز هذه الدائرة

وعلى ذلك فكل من س ع ، م ر ينصف الآخر فى ن

وفى المثلثين ں ه س ، م ه ع

من حيث ان { ں ه = م ه
، ه س = ه ع
، ∠ ں ه س = ∠ م ه ع

∴ ں س = م ع
= ا ع

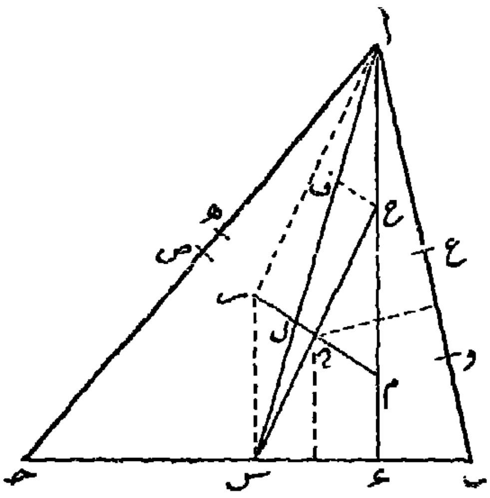
ومن حيث ان ں س يوازى ا ع ويساويه

∴ ں ا = س ع

لكن ں ا نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث

، س ع قطر دائرة النقط التسع

∴ قطر دائرة النقط التسع يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث وهو المطلوب



ثالثا — ملتقى المستقيمات المتوسطة والنقط م ، ه ، ں على استقامة واحدة

لذلك نصل ا س فيقطع م ں فى ل

ونرسم ع ف موازيا م ں

ففى △ ا م ل

من حيث ان ا ع = ع م

، ع ف يوازى م ل

∴ ا ف = ف ل (تمرين ١ صفحة ٦٩)

وفى △ س ع ف

من حيث ان ع ه = ه س

، ه ل يوازى ع ف

∴ ف ل = ل س

∴ ا ل = $\frac{٢}{٣}$ ا س

∴ ل ملتقى المستقيمات المتوسطة للمثلث ا ب ح

(نتيجة — صفحة ١٠٣)

فنقطة ملتقى المستقيمات المتوسطة فى المثلث والنقط م ، ه ، ں اذن على استقامة واحد وهو المطلوب

تمارين

١ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمركز دائرة النقط التسع اذا علم من المثلث قاعدته وزاوية رأسه

٢ دائرة النقط التسع للمثلث ا ب ح الذى ملتقى ارتفاعاته م هى دائرة النقط التسع لكل من المثلثات ا م ب ، ب م ح ، ح م ا

٣ اذا كانت ى ، ى$_1$ ، ى$_2$ ، ى$_3$ مراكز الدوائر المماسة للمثلث ا ب ح من الداخل ومن الخارج فالدائرة المرسومة عليه هى دائرة النقط التسع لكل من المثلثات الأربعة الحادثة من توصيل أى ثلاث من النقط ى ، ى$_1$ ، ى$_2$ ، ى$_3$

٤ اذا مر محيط دائرة برؤوس جملة مثلثات وكانت متحدة فى ملتقى ارتفاعاتها اتحدت كذلك فى دائرة النقط التسع

٥ اذا علم من مثلث قاعدته وزاوية رأسه فبين أن احدى زاويا مثلث المواقع وأحد أضلاعه ثابتا المقدار دائما

٦ معلوم من مثلث قاعدته وزاوية رأسه و يراد ايجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تمر بمراكز الدوائر الثلاث المماسة للمثلث من الخارج

(المطبعة الاميرية ٧٦٩ س و ٧٦٦١ ض ١٩٢٤/١١٥٠٠)